Тренировочная работа №1 по МАТЕМАТИКЕ
10 класс
8 февраля 2023 года
Вариант МА2200109
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО________________________________ класс ______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа включает в себя 18 заданий и состоит из двух частей.

Ответом в заданиях части 1 (1–11) является целое число или десятичная дробь. Запишите ответ в отведённом для него месте на листе с заданиями.

В заданиях части 2 (12–18) требуется записать полное решение на отдельном чистом листе.

При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором.

При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут.

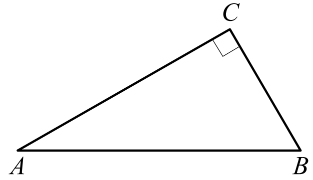
Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий. Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

Желаем успеха!

Часть 1

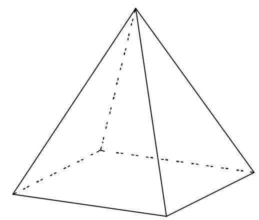
Ответом к каждому из заданий 1–11 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 6$, $\operatorname{tg} A = 0{,}75$.
Найдите длину стороны AC.



Ответ: ____________________.

2 Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 12, боковые рёбра равны 10. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Ответ: ____________________.

3 Вероятность того, что на тестировании по биологии учащийся У. верно решит больше 9 задач, равна 0,61. Вероятность того, что У. верно решит больше 8 задач, равна 0,73. Найдите вероятность того, что У. верно решит ровно 9 задач.

Ответ: ____________________.

4 В викторине участвуют 10 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых шести играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет седьмой раунд?

Ответ: ____________________.

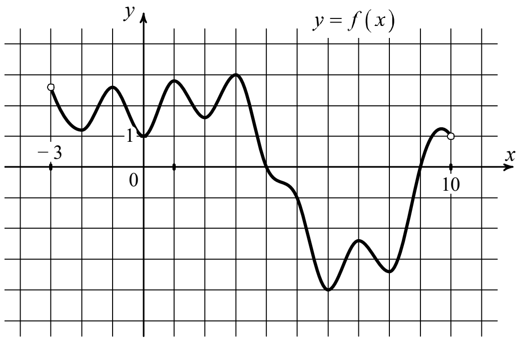
5 Найдите корень уравнения $\frac{x+51}{x+6}=-4$.

Ответ: ____________________________.

6 Найдите значение выражения $\frac{\left(6\sqrt{5}\right)^2}{12}$.

Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-3;10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна прямой $y=-13$.



Ответ: ____________________________.

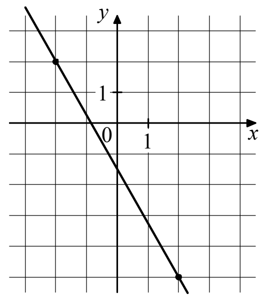
8 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. рублей за единицу) задаётся формулой $q=150-10p$. Выручка предприятия r (в тыс. рублей за месяц) вычисляется по формуле $r(p)=q\cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка r составит не менее 500 тыс. рублей. Ответ дайте в тысячах рублей за единицу.

Ответ: ____________________________.

9 Плиточник должен уложить 240 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 3 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 4 дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

Ответ: ____________________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x)=kx+b$. Найдите значение $f(8)$.



Ответ: ____________________________.

11 Найдите точку минимума функции $y=x^3-27x+19$.

Ответ: ____________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $5\sin 2x - 5\cos x + 14\sin x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

13 Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Известно, что $AA_1 : AB : AD = 1:2:\sqrt{5}$. На ребре AA_1 отметили такую точку M, что прямые OM и BD_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что точка M — середина ребра AA_1.

б) Найдите расстояние от точки M до прямой B_1D_1, если $AB = 2$, $BD = 3$.

14 Решите неравенство $x^3 + 7x^2 + \dfrac{16x^2 + 5x - 15}{x - 3} \le 5$.

15 В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года). Каждый из четырёх платежей составит 2,592 млн рублей. Сколько рублей будет взято в банке?

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём диаметром окружности является его диагональ AC. Также известно, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

а) Докажите, что отрезки AC и BD перпендикулярны.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$, если $AC = 50$ и $BD = 14$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{2}{x} - 5\right| = ax - 1$$

имеет больше двух различных положительных корней.

18 Для членов последовательности целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ выполняется неравенство $a_k + a_{k+2} < 2a_{k+1}$ для всех натуральных $k \le 8$.

а) Существует ли такая последовательность, в которой $a_1 = a_{10} = 2$?

б) Существует ли такая последовательность, в которой $a_1 + a_{10} = 2a_6$?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $a_1 - a_3 - a_8 + a_{10}$, где a_1, a_3, a_8, a_{10} — члены такой последовательности?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2200109-2200110 (профильный уровень) от 08.02.2023

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2200109	8	336	0,12	0,875	- 15	15	10	10	12	- 15,5	3
2200110	32	736	0,06	0,9	- 14	20	7	12	13	9	5

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

12 а) Решите уравнение $5\sin 2x - 5\cos x + 14\sin x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

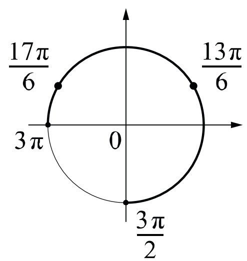
$$10\sin x\cos x - 5\cos x + 14\sin x - 7 = 0;$$

$$(5\cos x + 7)(2\sin x - 1) = 0,$$

откуда следует, что $\cos x = -\frac{7}{5}$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Уравнение $\cos x = -\frac{7}{5}$ решений не имеет, а для уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ получаем $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.



Получим $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

13 Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Известно, что $AA_1 : AB : AD = 1 : 2 : \sqrt{5}$. На ребре AA_1 отметили такую точку M, что прямые OM и BD_1 перпендикулярны.

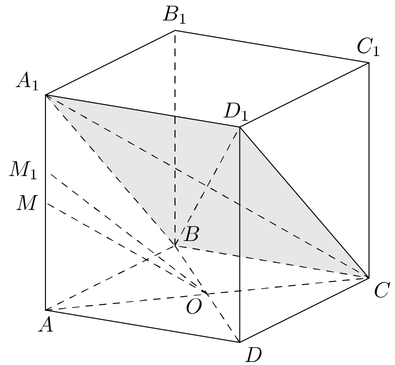
а) Докажите, что точка M — середина ребра AA_1.

б) Найдите расстояние от точки M до прямой B_1D_1, если $AB = 2$, $BD = 3$.

Решение.

а) Пусть $AA_1 = x$, $AB = 2x$, $AD = x\sqrt{5}$.

Из прямоугольного треугольника AA_1B находим, что $A_1B = \sqrt{x^2 + 4x^2} = x\sqrt{5}$. Так как $BC = AD = x\sqrt{5}$, в параллелограмме A_1BCD_1 смежные стороны A_1B и BC равны, значит, A_1BCD_1 — ромб, поэтому A_1C и BD_1 перпендикулярны как диагонали ромба.



В треугольнике AA_1C проведём среднюю линию OM_1. По свойству средней линии прямые OM_1 и A_1C параллельны, значит, прямая OM_1 перпендикулярна BD_1. Значит, прямые OM и OM_1 совпадают, то есть точка M — середина AA_1.

б) В треугольнике $A_1B_1D_1$ проведём высоту A_1N. Отрезок A_1N является проекцией наклонной MN на плоскость $A_1B_1C_1$, следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах MN и B_1D_1 перпендикулярны, поэтому расстояние от точки M до прямой B_1D_1 равно длине отрезка MN.

Так как $AB = 2$ и $AA_1 : AB : AD = 1 : 2 : \sqrt{5}$, получаем, что $AA_1 = 1$, $AD = \sqrt{5}$.

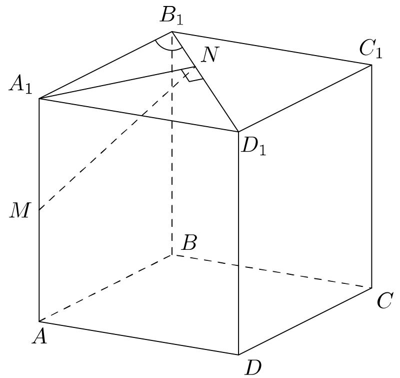
В треугольнике $A_1B_1D_1$ находим $\cos\angle A_1B_1D_1=\dfrac{4+9-5}{2\cdot 2\cdot 3}=\dfrac{2}{3}$.

Следовательно,

$\sin\angle A_1B_1D_1=\sqrt{1-\cos^2\angle A_1B_1D_1}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

В прямоугольном треугольнике A_1B_1N получаем:

$A_1N=A_1B_1\sin\angle A_1B_1N=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.



В прямоугольном треугольнике A_1MN по теореме Пифагора находим:

$$MN=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{20}{9}}=\frac{\sqrt{89}}{6}.$$

Ответ: б) $\dfrac{\sqrt{89}}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $x^3+7x^2+\dfrac{16x^2+5x-15}{x-3}\le 5$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$x^3+7x^2+\frac{16x^2}{x-3}+5\le 5;\quad x^3+7x^2+\frac{16x^2}{x-3}\le 0;$$

$$\frac{x^4+4x^3-5x^2}{x-3}\le 0;\quad \frac{x^2(x-1)(x+5)}{x-3}\le 0.$$

Решение исходного неравенства: $x\le -5$; $x=0$; $1\le x<3$.

Ответ: $(-\infty;-5]$; 0; $[1;3)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -5 и/или 1. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года). Каждый из четырёх платежей составит 2,592 млн рублей. Сколько рублей будет взято в банке?

Решение.

Пусть сумма кредита составляет S млн рублей, а ежегодные выплаты — $x=2{,}592$ млн рублей. По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S;\ 1{,}2S-x;\ 1{,}2^2S-(1{,}2x+x);\ 1{,}2^3S-\left(1{,}2^2x+1{,}2x+x\right);$$

$$1{,}2^4S-\left(1{,}2^3x+1{,}2^2x+1{,}2x+x\right)=0,$$

откуда находим $S=\dfrac{\left(1,2^4-1\right)x}{1,2^4\cdot\left(1,2-1\right)}=\dfrac{1,0736\cdot 2,592}{2,0736\cdot 0,2}=6,71$ млн рублей.

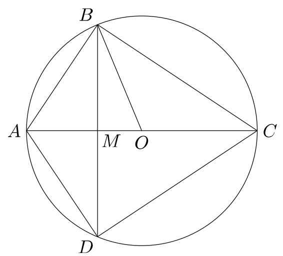
Ответ: 6,71 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём диаметром окружности является его диагональ AC. Также известно, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.
а) Докажите, что отрезки AC и BD перпендикулярны.
б) Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$, если $AC=50$ и $BD=14$.

Решение.

а) Пусть BD и AC пересекаются в точке M. Так как четырёхугольник $ABCD$ описан, получаем, что $AB+CD=BC+AD=s$. Будем считать, что $AB=x$, $BC=y$, тогда $CD=s-x$ и $AD=s-y$. Вписанные углы $\angle ABC$ и $\angle ADC$ прямые, так как AC — диаметр. По теореме Пифагора получаем $AC^2=x^2+y^2$ и $AC^2=(s-x)^2+(s-y)^2$. Из равенства $x^2+y^2=(s-x)^2+(s-y)^2$ получаем: $x+y=s$, $AB=AD$ и $BC=DC$.



Это значит, что треугольники ABC и ADC равны по трём сторонам, поэтому $\angle ACB=\angle ACD$. Значит, CM — биссектриса равнобедренного треугольника BCD, а также высота, проведённая к основанию BD. Получили, что отрезки AC и BD перпендикулярны.

б) Пусть O — центр окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$. Тогда её радиус OB равен $\frac{1}{2}AC=25$, поэтому $OM=\sqrt{OB^2-BM^2}=24$. Пусть $AM<MC$, тогда $AM=1$ и $MC=49$. Из прямоугольных треугольников AMB и BMC находим: $AB=\sqrt{AM^2+BM^2}=5\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{MC^2+BM^2}=35\sqrt{2}$, поэтому полупериметр четырёхугольника $ABCD$ равен $40\sqrt{2}$. Площадь

четырёхугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD=350$. Радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$, равен $\dfrac{350}{40\sqrt{2}}=\dfrac{35\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: б) $\dfrac{35\sqrt{2}}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{2}{x}-5\right|=ax-1$$

имеет больше двух различных положительных корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x)=ax-1$ и $g(x)=\left|\frac{2}{x}-5\right|$. Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$ на количество положительных корней.

При $a\le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0;+\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ неотрицательны, поэтому при $a\le 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $(0;+\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(0;\frac{2}{5}\right]$, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(0;\frac{2}{5}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{2}{5}\right)\ge g\left(\frac{2}{5}\right)$, откуда получаем: $a\cdot\frac{2}{5}-1\ge 0$, то есть $a\ge\frac{5}{2}$.

На промежутке $\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $ax-1=5-\frac{2}{x}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2-6x+2=0$ ($a>0$, поскольку случай $a\le 0$ был рассмотрен ранее). Дискриминант квадратного уравнения $D=36-8a$, поэтому при $a>\frac{9}{2}$ это уравнение не имеет корней; при $a=\frac{9}{2}$ уравнение имеет единственный корень, равный $\frac{2}{3}$; при $0<a<\frac{9}{2}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2, то есть $0<a<\frac{9}{2}$, то больший корень имеет вид $x_2=\frac{6+\sqrt{D}}{2a}>\frac{6}{2a}>\frac{2}{3}>\frac{2}{5}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$ тогда и только тогда, когда $ax^2-6x+2>0$ при $x=\frac{2}{5}$, то есть $a\left(\frac{2}{5}\right)^2-6\cdot\frac{2}{5}+2=\frac{4a-10}{25}>0$, значит $a>\frac{5}{2}$.

Таким образом, уравнение $\left|\frac{2}{x}-5\right|=ax-1$ имеет следующее количество корней на промежутке $(0;+\infty)$:

нет корней при $a\le 0$;

один корень при $0<a<\frac{5}{2}$ и $a>\frac{9}{2}$;

два корня при $a=\frac{5}{2}$ и $a=\frac{9}{2}$;

три корня при $\frac{5}{2}<a<\frac{9}{2}$.

Ответ: $\frac{5}{2}<a<\frac{9}{2}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $\frac{5}{2}$ и/или $\frac{9}{2}$. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию (аналитически или графически) количества корней дробно-рационального уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 Для членов последовательности целых чисел $a_1,a_2,...,a_{10}$ выполняется неравенство $a_k+a_{k+2}<2a_{k+1}$ для всех натуральных $k\le 8$.

а) Существует ли такая последовательность, в которой $a_1=a_{10}=2$?

б) Существует ли такая последовательность, в которой $a_1+a_{10}=2a_6$?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $a_1-a_3-a_8+a_{10}$, где a_1, a_3, a_8, a_{10} — члены такой последовательности?

Решение.

а) Да, например для последовательности 2, 6, 9, 11, 12, 12, 11, 9, 6, 2.

б) Да, например $a_k=\frac{(k+39)(10-k)}{2}$, где $1\le k\le 10$. Все её члены являются целыми числами, так как при нечётных k число $k+39$ делится на 2, а при чётных k число $10-k$ делится на 2. Имеем $a_1+a_{10}=180+0=180=2\cdot 90=2a_6$ и

$$a_k+a_{k+2}=\frac{(k+39)(10-k)}{2}+\frac{(k+41)(8-k)}{2}=-k^2-31k+359<-k^2-31k+360=$$
$$=2a_{k+1}$$ для всех $1\le k\le 8$.

в) Рассмотрим произвольную такую последовательность. Пусть $1\le k\le 8$. Неравенство $a_k+a_{k+2}<2a_{k+1}$ равносильно неравенству $a_k-a_{k+1}<a_{k+1}-a_{k+2}$. Поскольку все члены данной последовательности — целые числа, разности a_k-a_{k+1} и $a_{k+1}-a_{k+2}$ также являются целыми числами. Отсюда получаем, что $a_k-a_{k+1}\le a_{k+1}-a_{k+2}-1\le a_{k+2}-a_{k+3}-2\le ...\le a_{k+7}-a_{k+8}-7$ для всех $1\le k\le 2$. Значит,

$$a_1-a_3=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)\le(a_8-a_9)+(a_9-a_{10})-14=a_8-a_{10}-14.$$

Поэтому $a_1-a_3-a_8+a_{10}\le -14$.

Пример, приведённый в пункте а), показывает, что значение выражения $a_1 - a_3 - a_8 + a_{10}$ может быть равно -14.

Ответ: а) да; б) да; в) -14.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*