Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
10 класс
11 мая 2023 года
Вариант МА2200310
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа включает в себя 18 заданий и состоит из двух частей.

Ответом в заданиях части 1 (1–11) является целое число или десятичная дробь. Запишите ответ в отведённом для него месте на листе с заданиями.

В заданиях части 2 (12–18) требуется записать полное решение на отдельном чистом листе.

При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором.

При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут.

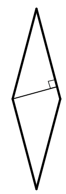
Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий. Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

Желаем успеха!

Часть 1

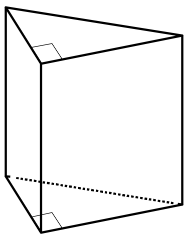
Ответом к каждому из заданий 1–11 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Найдите площадь ромба, если его высота равна 3, а острый угол равен 30°.



Ответ: ___________________________.

2 Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 4 и 8, боковое ребро призмы равно 4. Найдите объём призмы.



Ответ: ___________________________.

3 В среднем из 1300 садовых насосов, поступивших в продажу, 13 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ: ___________________________.

4 В ящике девять красных и семь синих фломастеров. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счёту?

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $4^{4-x} = 0{,}4 \cdot 10^{4-x}$.

Ответ: ____________________________.

6 Найдите значение выражения $\sqrt{754^2 - 304^2}$.

Ответ: ____________________________.

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = t^2 - 26,$$

где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 8 м/с?

Ответ: ____________________________.

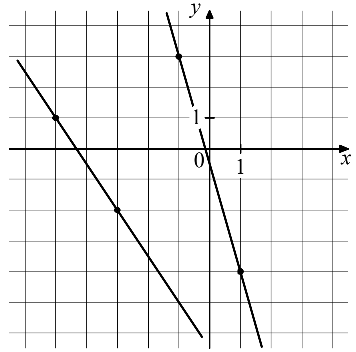
8 При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 640$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin\varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать третий максимум на решётке с периодом, не превосходящим 3840 нм?

Ответ: ____________________________.

9 Две трубы наполняют бассейн за 7 часов 22 минуты, а одна первая труба наполняет бассейн за 13 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

Ответ: ____________________________.

10 На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



Ответ: ____________________________.

11 Найдите точку максимума функции $y = (2x-1)\cos x - 2\sin x + 5$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: ____________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}-2=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

13 Точка M — середина ребра BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что плоскость AMB_1 параллельна прямой A_1C.

б) Найдите расстояние между прямой A_1C и плоскостью AMB_1, если параллелепипед прямоугольный, $AB=8$, $AD=8$ и $AA_1=4$.

14 Решите неравенство

$$\frac{(7-2x)^2}{x+2}\le\frac{4x^2-28x+49}{18-9x+x^2}.$$

15 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4 млн рублей на 8 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько миллионов рублей составит общая сумма выплат после погашения кредита?

16 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC=CD$.

а) Докажите, что $AB:BC=AP:PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB=8$, а $BC=8\sqrt{2}$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x)=16x^2-8ax+a^2+4a+4$$

на множестве $|x|\ge1$ не меньше 20.

18 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел -1, 2, -3, 5, -6, 7, 8, -9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел -1, 2, -3, 5, -6, 7, 8, -9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2200309-2200310 (профильный уровень) от 11.05.2022

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2200309	32	63	0,997	0,175	0,2	560	6	30	36	26	1,5
2200310	18	64	0,99	0,15	3	690	4	30	17	- 11	0,5

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

12

а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}-x\right)}-2=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Решение.

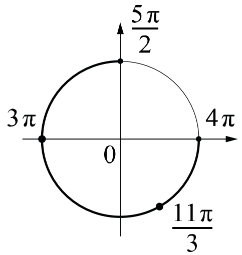
а) Преобразуем уравнение: $\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\cos x}-2=0$.

Пусть $y=\dfrac{1}{\cos x}$. Получаем

$$y^2-y-2=0, \text{ следовательно, } y=-1 \text{ или } y=2.$$

Значит, $\dfrac{1}{\cos x}=-1$, то есть $\cos x=-1$, откуда следует, что $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$, или $\dfrac{1}{\cos x}=2$, то есть $\cos x=\dfrac{1}{2}$, откуда следует, что $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$, или $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi m$, $m\in Z$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right]$.



Получаем: 3π; $\dfrac{11\pi}{3}$.

Ответ: а) $\pi+2\pi k$, $k\in Z$; $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi m$, $m\in Z$; б) 3π; $\dfrac{11\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

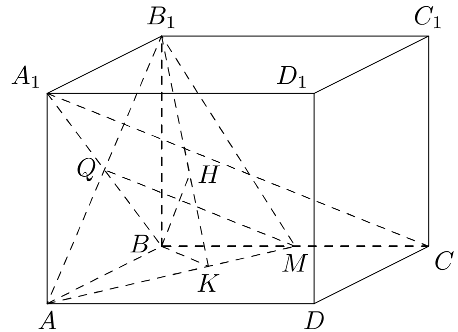
13

Точка M — середина ребра BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что плоскость AMB_1 параллельна прямой A_1C.

б) Найдите расстояние между прямой A_1C и плоскостью AMB_1, если параллелепипед прямоугольный, $AB=8$, $AD=8$ и $AA_1=4$.

Решение.



а) Пусть AB_1 и A_1B пересекаются в общей середине Q. Тогда MQ — средняя линия треугольника A_1BC, поэтому прямая MQ параллельна прямой A_1C. Таким образом, прямая A_1C параллельна плоскости AMB_1.

б) Найдём расстояние от точки C до плоскости AMB_1. Поскольку плоскость AMB_1 пересекает отрезок BC в его середине, расстояние от точки C до плоскости AMB_1 равно расстоянию от точки B до этой плоскости.

Проведём перпендикуляр BK к AM.

$AM=\sqrt{BM^2+AB^2}=4\sqrt{5}$, $BK=\dfrac{AB\cdot BM}{AM}=\dfrac{8\cdot 4}{4\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

$B_1K=\sqrt{BB_1^2+BK^2}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.

Искомое расстояние $BH=\dfrac{BB_1\cdot BK}{B_1K}=\dfrac{4\cdot\dfrac{8\sqrt{5}}{5}}{\dfrac{12\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{8}{3}$.

Ответ: б) $\dfrac{8}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство

$$\frac{(7-2x)^2}{x+2} \le \frac{4x^2-28x+49}{18-9x+x^2}.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{(7-2x)^2}{x+2} - \frac{(7-2x)^2}{(x-3)(x-6)} \le 0; \quad \frac{(7-2x)^2\left(x^2-9x+18-x-2\right)}{(x+2)(x-3)(x-6)} \le 0,$$

следовательно, $\dfrac{(7-2x)^2(x-2)(x-8)}{(x+2)(x-3)(x-6)} \le 0$.

Получаем: $x<-2$; $2 \le x < 3$; $x=3{,}5$; $6 < x \le 8$.

Ответ: $(-\infty; -2)$; $[2; 3)$; $\{3{,}5\}$; $(6; 8]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 2 и/или 8. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4 млн рублей на 8 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько миллионов рублей составит общая сумма выплат после погашения кредита?

Решение.

По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

4; 3,5; …, 1; 0,5; 0.

По условию каждый январь долг возрастает на 14 %. Значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

4,56; 3,99; …, 1,14; 0,57.

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

1,06; 0,99; …, 0,64; 0,57.

Поэтому всего следует выплатить:

$$1{,}06+0{,}99+\ldots+0{,}64+0{,}57=\frac{8\cdot 1{,}63}{2}=6{,}52 \text{ (млн рублей)}.$$

Ответ: 6,52 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC = CD$.
а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.
б) Найдите площадь треугольника COD, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 8$, а $BC = 8\sqrt{2}$.

Решение.

а) Вписанные углы BAC и DAC опираются на равные хорды, поэтому они равны (рис. 1). Вписанные углы ADB и ACB опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle ADP = \angle ADB = \angle ACB$. Значит, треугольники ADP и ACB подобны по первому признаку (по двум углам). Следовательно, $AB : BC = AP : PD$.

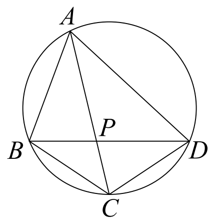


Рис. 1

б) Точки A и C лежат на окружности с диаметром BD, значит, треугольники ABD и BCD прямоугольные (рис. 2). Кроме того, по условию треугольник BCD равнобедренный, поэтому $BD = BC \cdot \sqrt{2} = 16$. Катет AB прямоугольного треугольника ABD равен половине гипотенузы BD, поэтому $\angle ADB = 30°$, $\angle ABD = 60°$.

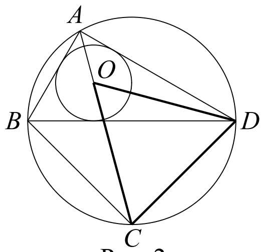


Рис. 2

Центр окружности, вписанной в треугольник, — точка пересечения его биссектрис, поэтому точка O лежит на биссектрисе AC угла BAD и на биссектрисе угла ADB. Тогда:

$$\angle ACD = \angle ABD = 60°,\ \angle ODB = \frac{1}{2}\angle ADB = 15°;$$

$$\angle ODC = \angle ODB + \angle BDC = 15° + 45° = 60°.$$

Следовательно, треугольник COD равносторонний, причём $CD = BC = 8\sqrt{2}$.
Следовательно, площадь треугольника COD равна $32\sqrt{3}$.
Ответ: б) $32\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 16x^2 - 8ax + a^2 + 4a + 4$$

на множестве $|x| \geq 1$ не меньше 20.

Решение.

Графиком функции $f(x) = (4x - a)^2 + 4a + 4$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина имеет координаты $\left(\frac{a}{4}; 4a+4\right)$. Значит, минимум функции $f(x)$ на всей числовой прямой достигается при $x = \frac{a}{4}$.

На множестве $|x| \geq 1$ эта функция достигает наименьшего значения либо в точке $x = \frac{a}{4}$, если эта точка принадлежит множеству, либо в одной из граничных точек $x = \pm 1$.

Разберём два случая: точка $x = \frac{a}{4}$ принадлежит или не принадлежит множеству $|x| \geq 1$.

Первый случай: $x=\frac{a}{4}$ при $|x|\geq 1$, то есть $a\leq -4$ или $a\geq 4$. В этом случае наименьшее значение функции на этом множестве достигается в этой точке и равно $4a+4$. Оно должно быть не меньше 20: $4a+4\geq 20$, откуда $a\geq 4$. Итак, в этом случае получаем: $a\geq 4$.

Второй случай: $x=\frac{a}{4}$ при $|x|<1$, то есть $-4<a<4$. Тогда наименьшее значение функции на множестве $|x|\geq 1$ – это минимум из чисел $f(-1)$ и $f(1)$. Он не меньше 20 тогда и только тогда, когда оба эти числа не меньше 20:

$$f(1)\geq 20;\quad a^2-4a+20\geq 20;\quad a(a-4)\geq 0,$$

$$f(-1)\geq 20;\quad a^2+12a+20\geq 20;\quad a(a+12)\geq 0,$$

откуда получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a(a-4)\geq 0, \\ a(a+12)\geq 0, \end{cases}$$

решениями которой являются $a\leq -12$; $a=0$; $a\geq 4$. Итак, в этом случае $a=0$.

Ответ: $a=0$; $a\geq 4$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого только исключением точки $a=4$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого исключением точек $a=0$ и $a=4$. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию функции $f(x)=(4x-a)^2+4a+4$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел -1, 2, -3, 5, -6, 7, 8, -9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел -1, 2, -3, 5, -6, 7, 8, -9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение.

а) Среди восьми данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому всё произведение не может равняться нулю.

б) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа, и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 1.

в) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4. Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, — это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках: $(-1;2)$; $(2;-1)$; $(-3;5)$; $(5;-3)$; $(-6;7)$; $(7;-6)$; $(8;-9)$; $(-9;8)$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*