Тренировочная работа №1 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
20 сентября 2018 года
Вариант МА10111
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

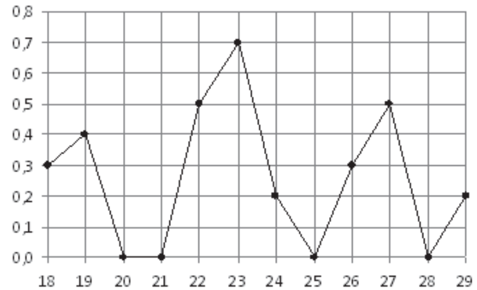
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Одного рулона обоев хватает для оклейки полосы от пола до потолка шириной 1,2 м. Сколько рулонов обоев нужно купить для оклейки прямоугольной комнаты размерами 1,1 м на 5,8 м?

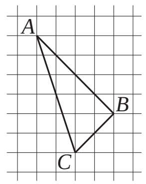
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Якутске с 18 по 29 октября 1986 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какое максимальное количество осадков выпадало в период с 24 по 29 октября. Ответ дайте в миллиметрах.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его медианы, проведённой из вершины C.



Ответ: ___________________________.

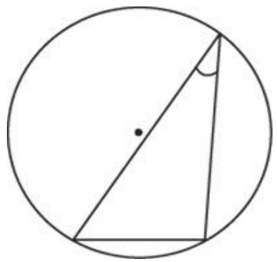
4 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,05. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: ___________________________.

5 Решите уравнение $\sqrt{-35+12x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

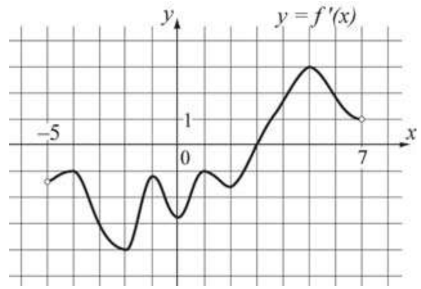
Ответ: ___________________________.

6 Найдите хорду, на которую опирается угол 30°, вписанный в окружность радиуса 37.



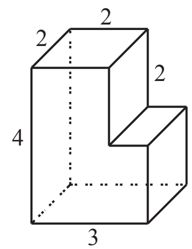
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;7)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-1;4]$.



Ответ: ___________________________.

8 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{17\left(m^4\right)^6+7\left(m^8\right)^3}{\left(4m^{12}\right)^2}$, если $m=2{,}9$.

Ответ: ___________________________.

10 Водолазный колокол, содержащий $\upsilon=2$ моля воздуха при давлении $p_1=2{,}4$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A=\alpha\upsilon T\log_2\dfrac{p_2}{p_1}$, где $\alpha=13{,}5\dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T=300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 16 200 Дж.

Ответ: ___________________________.

11 Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 30 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 80 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 2 часа 40 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=\left(x-41\right)^2e^{x-41}$ на отрезке $\left[39{,}5;\ 47\right]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $1-4\cos^2\left(x-\dfrac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\cos 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9}{2}\pi;\,-3\pi\right]$.

14 В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 4. Противоположные боковые рёбра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α, параллельная ребру MC.

а) Докажите, что сечение плоскостью α пирамиды $MABC$ является параллелограммом.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $MABC$ плоскостью α.

15 Решите неравенство $x^3+5x^2+\dfrac{30x^2+x-8}{x-8}\le 1$.

16 Две окружности касаются внешним образом в точке C. Прямая касается меньшей окружности в точке A, а большей — в точке B, отличной от A. Прямая AC вторично пересекает бóльшую окружность в точке D, прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке E.

а) Докажите, что прямая AE параллельна прямой BD.

б) Пусть L — отличная от D точка пересечения отрезка DE с большей окружностью. Найдите EL, если радиусы окружностей равны 2 и 3.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 30 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 15 млн в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором общая сумма средств вкладчика к началу третьего года станет больше 190 млн, а к концу проекта — больше 360 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x^2-x-a\right)^2=2x^4+2(x+a)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $[-1;1]$.

19 Пусть $K(n)$ обозначает сумму квадратов всех цифр натурального числа n.

а) Существует ли такое трёхзначное число n, что $K(n)=179$?

б) Существует ли такое трёхзначное число n, что $K(n)=184$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $K(n)-2n$, если n — трёхзначное число?

Ответы на тренировочные варианты 10109-10112 (профильный уровень) от 20.09.2018

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10109	397	33	10	0,017	1,25	132	10	4	18	90	14	0
10110	125	27	98	0,032	3,5	93	8	7	8	30	12	0
10111	12	0,5	4	0,0684	5	37	3	48	1,5	9,6	10	0
10112	9	4	5	0,0673	5	25	7	58	4,5	5	20	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $1-4\cos^2\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\cos 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9}{2}\pi; -3\pi\right]$.

<u>Решение.</u>

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$1-4\cos^2\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\cos 2x;$$

$$1-4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\cos 2x;$$

$$2\left(1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right)-1=\sqrt{3}\cos 2x;$$

$$2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1=\sqrt{3}\cos 2x;$$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)-1=\sqrt{3}\cos 2x;$$

$$\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x-1=\sqrt{3}\cos 2x;$$

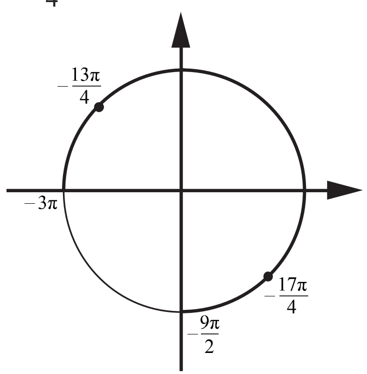
$$\sin 2x=-1.$$

Следовательно,

$$2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \text{где}\ k\in\mathbb{Z},\ \text{откуда}\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \text{где}\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

Получим числа $-\frac{17\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{4}$.



Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

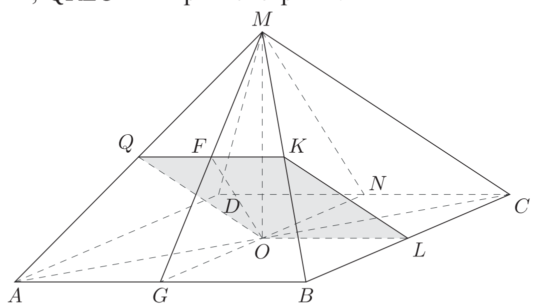
14 В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 4. Противоположные боковые рёбра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α, параллельная ребру MC.

а) Докажите, что сечение плоскостью α пирамиды $MABC$ является параллелограммом.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $MABC$ плоскостью α.

<u>Решение.</u>

а) Пусть точка Q — середина ребра MA, а точка K — середина ребра MB. Плоскость α пересекает плоскость BMC по отрезку KL, параллельному ребру MC. Следовательно, плоскость α пересекает плоскость AMC по прямой, параллельной ребру MC. На этой прямой лежит средняя линия треугольника AMC, поэтому плоскость α проходит через точку O — середину отрезка AC. Таким образом, сечение — четырёхугольник $QKLO$, в котором стороны KL и QO параллельны отрезку MC и равны его половине. Значит, $QKLO$ — параллелограмм.



б) Отметим точку F — середину отрезка QK и рассмотрим плоскость MOF. Прямая QK перпендикулярна прямым FM и MO, следовательно, она перпендикулярна плоскости MFO, поэтому она перпендикулярна отрезку OF. Таким образом, отрезок OF служит высотой параллелограмма $QKLO$.

Сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью MOF — равнобедренный треугольник NMG. Отрезок OF является медианой прямоугольного треугольника MOG, проведённой к его гипотенузе, поэтому $OF=\frac{1}{2}MG$.

По условию треугольник AMC прямоугольный и равнобедренный, поэтому

$$AM=\frac{1}{\sqrt{2}}AC=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot 4=4,$$

и то же верно для других боковых рёбер. Следовательно, все боковые грани пирамиды — равносторонние треугольники. Тогда $MG=2\sqrt{3}$ и $OF=\sqrt{3}$.

Площадь параллелограмма $QKLO$ равна $OL\cdot OF=2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $x^3+5x^2+\frac{30x^2+x-8}{x-8}\le 1$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{\left(x^3+5x^2\right)\left(x-8\right)+30x^2+x-8}{x-8}\le 1;$$

$$\frac{x^4+5x^3-8x^3-40x^2+30x^2+x-8-x+8}{x-8}\le 0; \quad \frac{x^4-3x^3-10x^2}{x-8}\le 0;$$

$$\frac{x^2\left(x-5\right)\left(x+2\right)}{x-8}\le 0,$$

откуда $x\le -2$, $x=0$ и $5\le x<8$.

Ответ: $\left(-\infty;-2\right]$; 0; $\left[5;8\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16

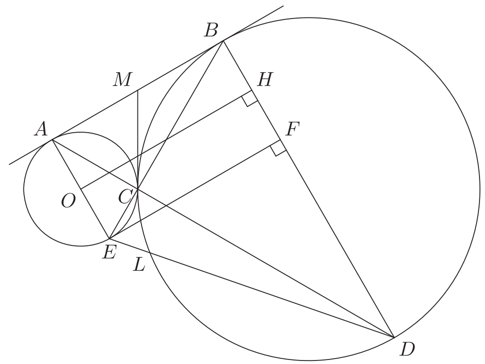
Две окружности касаются внешним образом в точке C. Прямая касается меньшей окружности в точке A, а большей — в точке B, отличной от A. Прямая AC вторично пересекает бóльшую окружность в точке D, прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке E.

а) Докажите, что прямая AE параллельна прямой BD.

б) Пусть L — отличная от D точка пересечения отрезка DE с большей окружностью. Найдите EL, если радиусы окружностей равны 2 и 3.

Решение.

а) Пусть общая касательная к данным окружностям, проведённая через точку C, пересекает общую касательную AB в точке M. Тогда $MA=MC=MB$, то есть медиана CM треугольника ABC равна половине стороны AB. Значит, $\angle ACB=90°$. Тогда $\angle ACE=90°$, поэтому AE — диаметр меньшей окружности. Следовательно, прямая AE перпендикулярна прямой AB. Аналогично докажем, что прямая BD перпендикулярна прямой AB. Прямые AE и BD перпендикулярны одной и той же прямой AB, значит, они параллельны.



б) Пусть радиусы окружностей равны r и R, где $r<R$. Опустим перпендикуляр OH из центра O меньшей окружности на диаметр BD большей. Тогда

$$OH^2=(R+r)^2-(R-r)^2=4rR.$$

Опустим перпендикуляр EF из точки E на BD. Тогда

$$DE=\sqrt{EF^2+DF^2}=\sqrt{OH^2+(BD-BF)^2}=$$

$$=\sqrt{4rR+(2R-2r)^2}=2\sqrt{R^2+r^2-Rr}=2\sqrt{9+4-6}=2\sqrt{7}.$$

Отрезок AC — высота прямоугольного треугольника ABE, проведённая из вершины прямого угла, а EB и ED — секущие к большей окружности, проведённые из одной точки, поэтому

$$EL\cdot DE=EC\cdot EB=AE^2.$$

Следовательно,

$$EL=\frac{EC\cdot EB}{ED}=\frac{AE^2}{ED}=\frac{16}{2\sqrt{7}}=\frac{8\sqrt{7}}{7}.$$

Ответ: $\frac{8\sqrt{7}}{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 30 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 15 млн в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором общая сумма средств вкладчика к началу третьего года станет больше 190 млн, а к концу проекта — больше 360 млн рублей.

Решение.

Пусть S млн — первоначальные вложения. К началу 2-го года получится $1{,}3S+20$ млн, а к началу 3-го года — $1{,}3(1{,}3S+20)+20=1{,}69S+46$. По условию $1{,}69S+46>190$, откуда $S>\frac{144}{1{,}69}=85{,}2...$

К началу 4-го года имеем $1{,}3(1{,}69S+46)+15$, а в конце проекта —

$$1{,}3(1{,}3(1{,}69S+46)+15)+15=2{,}8561S+77{,}74+34{,}5=2{,}8561S+112{,}24.$$

По условию $2{,}8561S+112{,}24>360$, откуда $S>\frac{247{,}76}{2{,}8561}=86{,}7...$

А значит, минимальное возможное целое значение: $S=87$.

Ответ: 87 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x^2-x-a\right)^2=2x^4+2(x+a)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $[-1;1]$.

Решение.

Уравнение $\left(x^2-x-a\right)^2=2x^4+2(x+a)^2$ равносильно уравнениям $x^4-2x^2(x+a)+(x+a)^2=2x^4+2(x+a)^2$, $\left(x^2+x+a\right)^2=0$ и $x^2+x+a=0$.

Положим $f(x)=x^2+x+a$. Последнее уравнение имеет единственный корень на отрезке $[-1;1]$ тогда и только тогда, когда выполнен один из трёх случаев: либо квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет единственный корень и этот корень принадлежит интервалу $(-1;1)$, либо $f(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[-1;1]$, равный -1 или 1, либо квадратный трёхчлен $f(x)$ принимает при $x=-1$ и $x=1$ ненулевые значения разных знаков.

Рассмотрим первый случай. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет единственный корень при равенстве нулю его дискриминанта, то есть при $1-4a=0$, или, что то же самое, при $a=0{,}25$.

При таком значении a уравнение $x^2+x+a=0$ имеет единственный корень $x=-0{,}5$, он принадлежит отрезку $[-1;1]$.

Рассмотрим второй случай. Имеем $f(-1)=a$ и $f(1)=2+a$. Значит, $f(-1)=0$ при $a=0$. При таком значении a уравнение $x^2+x+a=0$ имеет два решения $x=0$ и $x=-1$ на отрезке $[-1;1]$. Аналогично $f(1)=0$ при $a=-2$. При таком значении a уравнение $x^2+x+a=0$ имеет единственное решение $x=1$ на отрезке $[-1;1]$.

Рассмотрим третий случай. Значения $f(-1)=a$ и $f(1)=2+a$ имеют разные знаки тогда и только тогда, когда $a(2+a)<0$, или, что то же самое, при $-2<a<0$.

Следовательно, уравнение $\left(x^2-x-a\right)^2=2x^4+2(x+a)^2$ имеет единственное решение на отрезке $[-1;1]$ тогда и только тогда, когда $a=0{,}25$ или $-2\le a<0$.

Ответ: $[-2;0)$; 0,25.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Пусть $K(n)$ обозначает сумму квадратов всех цифр натурального числа n.

а) Существует ли такое трёхзначное число n, что $K(n)=179$?

б) Существует ли такое трёхзначное число n, что $K(n)=184$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $K(n)-2n$, если n — трёхзначное число?

Решение.

а) Такое число существует. Например, для числа $n=977$ имеем $9^2+7^2+7^2=179$.

б) Заметим, что для любого целого числа k число k^2 либо делится на 4, если k чётно, либо даёт при делении на 4 остаток 1, если k нечётно. Значит, сумма квадратов всех цифр произвольного трёхзначного числа n может делиться на 4, только если квадрат каждой из его цифр делится на 4, то есть когда все его цифры чётны. Следовательно, если $K(n)=184=4\cdot46$, то все цифры числа n чётны и либо $K(n)=8^2+8^2+8^2=192$, либо $K(n)\le8^2+8^2+6^2=164$. Значит, искомого числа n не существует.

в) Пусть $n=100a+10b+c$, где a, b, c — цифры. Тогда

$$K(n)-2n=(a^2+b^2+c^2)-2(100a+10b+c)=$$
$$=(a-100)^2+(b-10)^2+(c-1)^2-100^2-10^2-1^2.$$

Наименьшие возможные значения выражений $(a-100)^2$, $(b-10)^2$ и $(c-1)^2$, где a, b, c — цифры, равны 91^2, 1^2 и 0^2 соответственно и достигаются при $a=9$, $b=9$ и $c=1$. Значит,

$$K(n)-2n\ge91^2+1^2+0^2-100^2-10^2-1^2=-1819.$$

При $n = 991$ имеем $K(n) - 2n = 163 - 2 \cdot 991 = -1819$. Следовательно, наименьшее значение, которое может принимать выражение $K(n) - 2n$, если n трёхзначное число, равно -1819.

Ответ: а) Да; б) нет; в) -1819.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4