Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
20 декабря 2018 года
Вариант МА10209
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

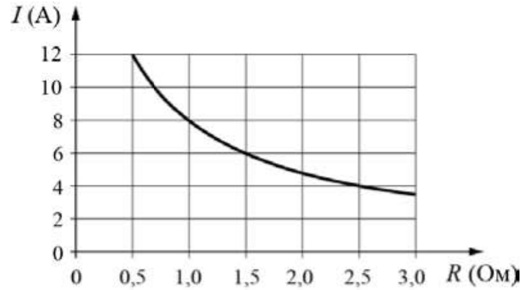
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Для покраски 1 кв. м потолка требуется 200 г краски. Краска продаётся в банках по 1,5 кг. Какое наименьшее количество банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 52 кв. м?

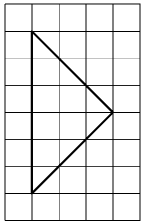
Ответ: ___________________________.

2 Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. Каково сопротивление цепи (в омах), если сила тока составляет 8 ампер?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите длину его медианы, проведённой к гипотенузе.



Ответ: ___________________________.

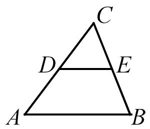
4 Вероятность того, что на тестировании по истории учащийся Т. верно решит больше 8 задач, равна 0,76. Найдите вероятность того, что Т. верно решит ровно 8 задач или меньше.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{5}{20-6x}}=\dfrac{1}{10}$.

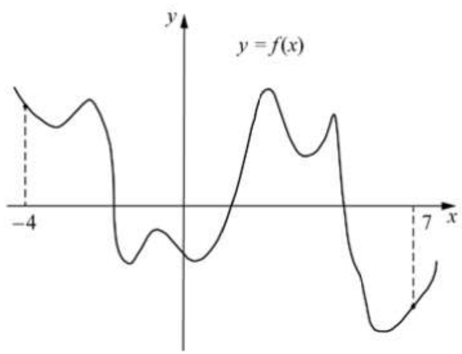
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC отрезок DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Площадь треугольника ABC равна 48. Найдите площадь трапеции $ABED$.



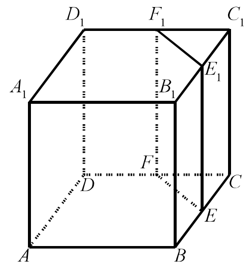
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих интервалу $(-4;7)$.



Ответ: ___________________________.

8 Объём куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12. Построено сечение EFF_1E_1, проходящее через середины рёбер BC, CD и C_1D_1 и параллельное ребру CC_1. Найдите объём треугольной призмы $CEFC_1E_1F_1$.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{5^{8,2}}{25^{2,6}}$.

Ответ: ___________________________.

10 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a=0,4$ м/с². Скорость v вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите, сколько метров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 30 м/с.

Ответ: ___________________________.

11 Первый и второй насосы, работая вместе, наполняют бассейн за 90 минут, второй и третий, работая вместе, — за 140 минут, а первый и третий, работая вместе, — за 180 минут. За сколько минут заполнят бассейн все три насоса, работая вместе?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции
$$y=3\sin x-12x+2$$
на отрезке $[-\pi;0]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{7}{1-\cos^2 x}+\dfrac{9}{\sin x}=10$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 10, а сторона основания равна 12. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG:GB=AF:FC=1:5$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF.

15 Решите неравенство $4^{x-3}-2^{x-3}\left(16-x^2\right)-16x^2\geq 0$.

16 Дан треугольник ABC со сторонами $AB=20$, $AC=12$ и $BC=16$. Точки M и N — середины сторон AB и AC соответственно.

а) Докажите, что окружность, вписанная в треугольник ABC, касается одной из средних линий.

б) Найдите общую хорду окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая описана около треугольника AMN.

17 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q=0{,}5x^2+7x+12$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px-q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль может составить не менее 344 млн рублей?

18 Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-1, \\ x=(a+2)y^2+2ay+a-1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

19 а) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\dfrac{1*3*6*15}{1*4*8*16}$ вместо всех знаков * так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $\dfrac{5}{3}$?

б) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\dfrac{1*3*6*9*12}{1*4*8*12*16}$ вместо всех знаков * так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $\dfrac{4}{7}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $\left|\dfrac{3}{4}-\dfrac{1*3*6*9*12}{1*4*8*12*16}\right|$, если всевозможными способами заменять каждый из знаков * на + или –?

Ответы на тренировочные варианты 10209-10212 (профильный уровень) от 20.12.2018

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10209	7	1	3	0,24	- 80	36	4	1,5	125	1125	84	2
10210	7	0,5	2	0,36	- 201	24	5	8,75	216	875	72	8
10211	10	4	12	0,25	- 4	45	5	0,3	2	60	8	-4
10212	10	6	6	0,2	- 2	39	4	0,6	3	60	27	7

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\dfrac{7}{1-\cos^2 x}+\dfrac{9}{\sin x}=10$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

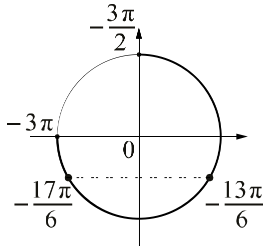
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде $\dfrac{7}{\sin^2 x}+\dfrac{9}{\sin x}=10$;

$$\frac{7+9\sin x-10\sin^2 x}{\sin^2 x}=0;\ -\frac{10\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)\left(\sin x-\frac{7}{5}\right)}{\sin^2 x}=0.$$

Следовательно, $\sin x=-\dfrac{1}{2}$, откуда $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$ или $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.



Получим числа $-\dfrac{17\pi}{6}$, $-\dfrac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$; $-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{17\pi}{6}$; $-\dfrac{13\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

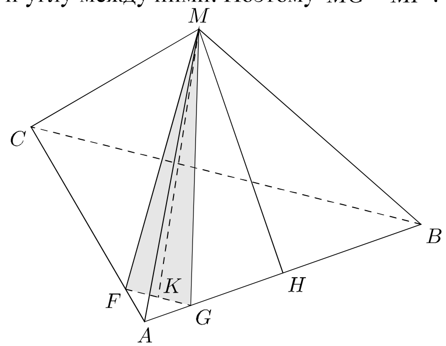
14 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 10, а сторона основания равна 12. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG:GB=AF:FC=1:5$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF.

Решение.

а) Из условия следует, что $AG=AF=2$. Треугольники AMG и AMF равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $MG=MF$.



б) Проведём высоту MH боковой грани AMB. Из прямоугольного треугольника AHM находим

$$MH=\sqrt{AM^2-AH^2}=8.$$

В прямоугольном треугольнике MHG катет HG равен 4. Поэтому

$$MG=\sqrt{MH^2+HG^2}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}.$$

Треугольник AGF равносторонний, поэтому $GF=AG=2$. В равнобедренном треугольнике GMF проведём высоту MK. Она делит отрезок GF пополам. Из прямоугольного треугольника MKG получаем

$$MK=\sqrt{MG^2-GK^2}=\sqrt{80-1}=\sqrt{79}.$$

Следовательно, площадь треугольника GMF равна $\dfrac{1}{2}\cdot GF\cdot MK=\sqrt{79}$.

Ответ: $\sqrt{79}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $4^{x-3}-2^{x-3}\left(16-x^2\right)-16x^2\geq 0$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде $4^{x-3}-16\cdot 2^{x-3}+2^{x-3}x^2-16x^2\geq 0$;

$2^{x-3}\left(2^{x-3}+x^2\right)-16\left(2^{x-3}+x^2\right)\geq 0$; $\left(2^{x-3}+x^2\right)\left(2^{x-3}-16\right)\geq 0$; $x-3\geq 4$; $x\geq 7$.

Ответ: $[7;+\infty)$.

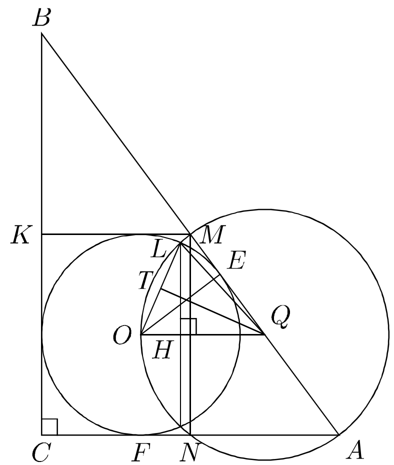
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Дан треугольник ABC со сторонами $AB=20$, $AC=12$ и $BC=16$. Точки M и N — середины сторон AB и AC соответственно.

а) Докажите, что окружность, вписанная в треугольник ABC, касается одной из средних линий.

б) Найдите общую хорду окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая описана около треугольника AMN.

Решение.



а) Из теоремы, обратной теореме Пифагора, следует, что треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине C. Пусть радиус его вписанной окружности равен r. Тогда

$$r=\frac{AC+BC-AB}{2}=\frac{12+16-20}{2}=4.$$

Пусть K — середина катета BC. Тогда расстояние между прямыми KM и AC равно длине отрезка MN, то есть 8. Значит, расстояние между этими прямыми равно диаметру вписанной в треугольник ABC окружности. Следовательно, эта окружность касается средней линии KM.

б) Треугольник AMN прямоугольный с прямым углом при вершине N, значит, центр описанной окружности треугольника AMN — середина Q отрезка AM, а радиус равен 5. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках E и F соответственно. Тогда

$$CF=r=4,\ AE=AF=AC-CF=12-4=8,\ EQ=AE-AQ=8-5=3,$$

$$OQ=\sqrt{OE^2+EQ^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

Пусть L — одна из точек пересечения рассматриваемых окружностей. Общая хорда пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров и делится ею пополам, значит, искомое расстояние равно удвоенной высоте LH треугольника OLQ со сторонами $OQ=5$, $OL=4$ и $QL=5$, проведённой из вершины L. Высота QT этого равнобедренного треугольника, опущенная на основание, является медианой, значит,

$$QT=\sqrt{LQ^2-LT^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}.$$

Поэтому

$$LH=\frac{OL\cdot QT}{OQ}=\frac{4\sqrt{21}}{5}.$$

Следовательно, искомое расстояние равно $\frac{8\sqrt{21}}{5}$.

Ответ: $\frac{8\sqrt{21}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q=0{,}5x^2+7x+12$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px-q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль может составить не менее 344 млн рублей?

Решение.

Прибыль (в млн рублей) за один год выражается как

$px-\left(0{,}5x^2+7x+12\right)=-0{,}5x^2+\left(p-7\right)x-12$.

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x=p-7$. Наибольшее значение равно $\frac{\left(p-7\right)^2}{2}-12$. Через 4 года прибыль составит не менее 344 млн рублей, если

$$\frac{\left(p-7\right)^2}{2}-12\ge\frac{344}{4};$$

откуда $\left(p-7\right)^2\ge196$; $\left(p-21\right)\left(p+7\right)\ge0$.

Цена продукции не может быть отрицательной, поэтому $p=21$.

Ответ: 21.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} y=\left(a+2\right)x^2+2ax+a-1, \\ x=\left(a+2\right)y^2+2ay+a-1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение.

Система не изменится, если поменять x и y местами. Следовательно, система имеет единственное решение, только если $x=y$. Получаем уравнение:

$$\left(a+2\right)x^2+\left(2a-1\right)x+a-1=0.$$

Это уравнение должно иметь единственный корень.

Если $a\ne-2$, то дискриминант должен равняться нулю:

$$\left(2a-1\right)^2-4\left(a+2\right)\left(a-1\right)=0;$$
$$-8a+9=0,$$

откуда $a=\frac{9}{8}$.

При $a=\frac{9}{8}$ получаем $\frac{25}{8}x^2+\frac{10}{8}x+\frac{1}{8}=0$, откуда $x=-0{,}2$. Тогда решением системы является пара $\left(-0{,}2;-0{,}2\right)$.

Если $a=-2$, получается линейное уравнение $5x+3=0$, которое имеет единственное решение $x=-0{,}6$. Решением системы является пара $\left(-0{,}6;-0{,}6\right)$.

Покажем, что в этих случаях нет иных решений, где $x \neq y$. Вычтем второе уравнение системы из первого и разделим полученное уравнение почленно на $x-y \neq 0$:

$$-1=(a+2)(x+y)+2a.$$

При $a=-2$ получается, что $a=-0{,}5$. Решений нет.

При $a=\frac{9}{8}$ получаем $y=-\frac{26}{25}-x$. Подставим это выражение в первое уравнение системы:

$$-\frac{26}{25}-x=\frac{25}{8}x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{8}; \quad 25x^2+26x+\frac{233}{25}=0.$$

Полученное уравнение не имеет корней.

Ответ: -2; $\frac{9}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Присутствуют все шаги решения, получены верные значения параметра, но отсутствует доказательство того, что при каждом из них система имеет единственное решение	3
С помощью верного рассуждения получено только одно значение a	2
С помощью верного рассуждения задача сведена к исследованию квадратного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 а) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\frac{1*3*6*15}{1*4*8*16}$ вместо всех знаков * так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $\frac{5}{3}$?

б) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\frac{1*3*6*9*12}{1*4*8*12*16}$ вместо всех знаков * так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $\frac{4}{7}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $\left|\frac{3}{4}-\frac{1*3*6*9*12}{1*4*8*12*16}\right|$, если всевозможными способами заменять каждый из знаков * на + или –?

Решение.

а) Да. Например, $\frac{1+3+6-15}{1+4+8-16}=\frac{5}{3}$.

б) Рассмотрим какую-либо возможную расстановку знаков в знаменателе $1*4*8*12*16$ данной дроби. Имеем $1\pm4\pm8\pm12\pm16=1+4(\pm1\pm2\pm3\pm4)$, где знаки + и – расставлены соответствующим образом. Сумма всех чисел в последних скобках чётна и может принимать значения вида $2m$, где m — некоторое целое число от -5 до 5. Значит, знаменатель дроби равен $8m+1=7m+(m+1)$. Среди всех возможных значений m знаменатель делится на 7 лишь при $m=-1$. Следовательно, если знаки расставлены так, что данная дробь равна $\frac{4}{7}$, то её знаменатель $1*4*8*12*16$ равен -7. Тогда её числитель $1*3*6*9*12$ равен -4. Пришли к противоречию, так как число $1\pm3\pm6\pm9\pm12$ всегда при делении на 3 даёт остаток 1, а число -4 — остаток 2. Значит, расставить знаки требуемым образом невозможно.

в) Аналогично доказанному в пункте б) получаем, что при всевозможных расстановках знаков + и – выражение примет вид $\left|\frac{3}{4}-\frac{6k+1}{8m+1}\right|$, где k и m пробегают все целые числа от -5 до 5. Поскольку $\frac{3}{4}=\frac{6m+\frac{3}{4}}{8m+1}$, получаем $\left|\frac{3}{4}-\frac{6k+1}{8m+1}\right|=\left|\frac{6(m-k)-\frac{1}{4}}{8m+1}\right|$. При фиксированном значении m это выражение минимально при $k=m$. В этом случае оно равно $\left|\frac{1}{32m+4}\right|$. Так как m пробегает все целые числа от -5 до 5, максимум модуля $32m+4$ достигается при $m=5$. Значит, наименьшее значение, которое может принимать выражение $\left|\frac{3}{4}-\frac{1*3*6*9*12}{1*4*8*12*16}\right|$, если всевозможными способами заменять каждый из знаков * на + или –, равно $\frac{1}{164}$. Оно достигается при $k=m=5$ — в случае, когда каждый из знаков * заменён на +.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) $\frac{1}{164}$.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *б* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4