Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
20 декабря 2018 года
Вариант МА10212
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

© СтатГрад 2018−2019 уч. г. Публикация в интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

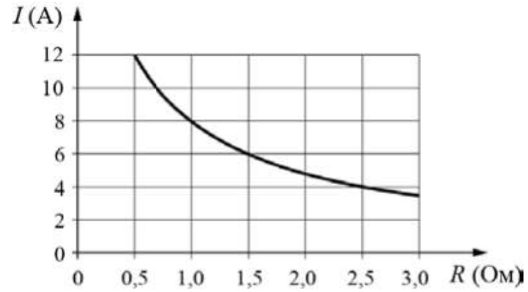
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Для ремонта квартиры требуется 59 рулонов обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 6 рулонов?

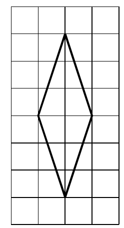
Ответ: ___________________________.

2 Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. На сколько ампер изменится сила тока, если увеличить сопротивление с 0,5 ома до 1,5 ома?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________________.

© СтатГрад 2018−2019 уч. г. Публикация в интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

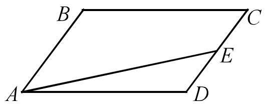
4 На олимпиаде по обществознанию 400 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 160 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $(x-1)^5=-243$.

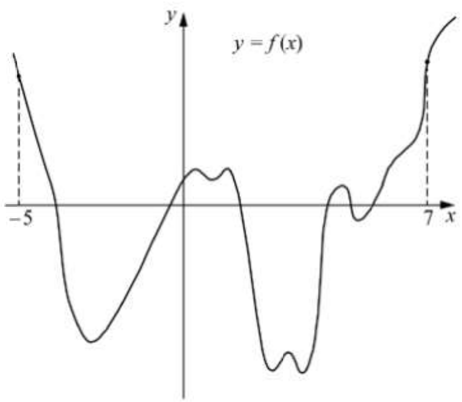
Ответ: ___________________________.

6 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 156. Точка E — середина стороны CD. Найдите площадь треугольника ADE.



Ответ: ___________________________.

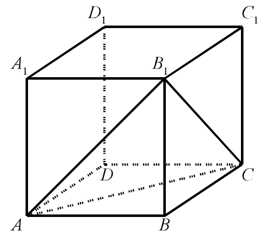
7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих интервалу $(-5;7)$.



Ответ: ___________________________.

© СтатГрад 2018−2019 уч. г. Публикация в интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

8 Объём прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 3,6. Найдите объём треугольной пирамиды $ABCB_1$.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $12\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}$.

Ответ: ___________________________.

10 Трактор тащит сани с силой $F=40$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S=200$ м вычисляется по формуле $A=FS\cos\alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершённая работа будет не менее 4000 кДж?

Ответ: ___________________________.

11 Первый насос наполняет бак за 1 час, второй — за 1 час 30 минут, а третий — за 1 час 48 минут. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции $y=9^{-31+14x-x^2}$.

Ответ: ___________________________.

© СтатГрад 2018−2019 уч. г. Публикация в интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\frac{5}{1-\sin^2 x}+\frac{7}{\cos x}=6$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 5, а сторона основания равна 6. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG:GB=AF:FC=1:5$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF.

15 Решите неравенство $9^{x-1}-3^{x-1}\left(81-x^2\right)-81x^2\geq 0$.

16 Дан треугольник ABC со сторонами $AB=40$, $AC=24$ и $BC=32$. Точки M и N — середины сторон AB и AC соответственно.

а) Докажите, что окружность, вписанная в треугольник ABC, касается одной из средних линий.

б) Найдите общую хорду окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая описана около треугольника AMN.

17 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q=0{,}5x^2+9x+15$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px-q$. При каком наименьшем значении p через 4 года суммарная прибыль может составить не менее 278 млн рублей?

© СтатГрад 2018−2019 уч. г. Публикация в интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

18 Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} y=(a+3)x^2+(2a+1)x+a, \\ x=(a+3)y^2+(2a+1)y+a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

19 а) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\frac{2*4*6*9}{2*4*5*7}$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $-\frac{3}{4}$?

б) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\frac{1*2*4*6*8}{1*3*6*9*12}$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $-\frac{4}{5}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $\left|\frac{2}{3}-\frac{1*2*4*6*8}{1*3*6*9*12}\right|$, если всевозможными способами заменять каждый из знаков $*$ на + или –?

© СтатГрад 2018−2019 уч. г. Публикация в интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

Ответы на тренировочные варианты 10209-10212 (профильный уровень) от 20.12.2018

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10209	7	1	3	0,24	- 80	36	4	1,5	125	1125	84	2
10210	7	0,5	2	0,36	- 201	24	5	8,75	216	875	72	8
10211	10	4	12	0,25	- 4	45	5	0,3	2	60	8	-4
10212	10	6	6	0,2	- 2	39	4	0,6	3	60	27	7

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\dfrac{5}{1-\sin^2 x}+\dfrac{7}{\cos x}=6$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

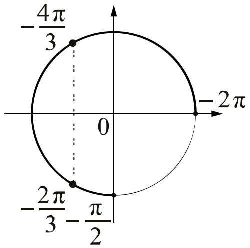
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде $\dfrac{5}{\cos^2 x}+\dfrac{7}{\cos x}=6$;

$$\frac{5+7\cos x-6\cos^2 x}{\cos^2 x}=0;\ -\frac{6\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)\left(\cos x-\frac{5}{3}\right)}{\cos^2 x}=0.$$

Следовательно, $\cos x=-\dfrac{1}{2}$, откуда $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}\right]$.



Получим числа $-\dfrac{4\pi}{3},\ -\dfrac{2\pi}{3}$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{4\pi}{3};\ -\dfrac{2\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

© СтатГрад 2018−2019 уч. г. Публикация в интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

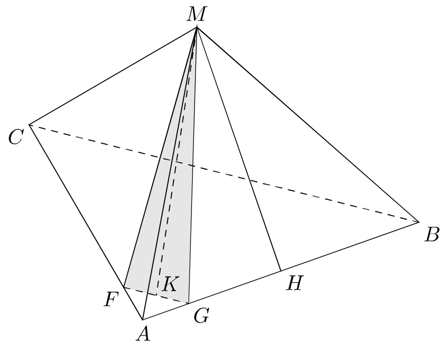
14

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 5, а сторона основания равна 6. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG:GB=AF:FC=1:5$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF.

Решение.



а) Из условия следует, что $AG=AF=1$. Треугольники AMG и AMF равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $MG=MF$.

б) Проведём высоту MH боковой грани AMB. Из прямоугольного треугольника AHM находим

$$MH=\sqrt{AM^2-AH^2}=4.$$

В прямоугольном треугольнике MHG катет HG равен 2. Поэтому

$$MG=\sqrt{MH^2+HG^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}.$$

Треугольник AGF равносторонний, поэтому $GF=AG=1$. В равнобедренном треугольнике GMF проведём высоту MK. Она делит отрезок GF пополам. Из прямоугольного треугольника MKG получаем

$$MK=\sqrt{MG^2-GK^2}=\sqrt{20-0,25}=\frac{\sqrt{79}}{2}.$$

Следовательно, площадь треугольника GMF равна $\dfrac{1}{2}\cdot GF\cdot MK=\dfrac{\sqrt{79}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{79}}{4}$.

© СтатГрад 2018−2019 уч. г. Публикация в интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $9^{x-1}-3^{x-1}\left(81-x^2\right)-81x^2\ge 0$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде $9^{x-1}-81\cdot 3^{x-1}+3^{x-1}x^2-81x^2\ge 0$;

$3^{x-1}\left(3^{x-1}+x^2\right)-81\left(3^{x-1}+x^2\right)\ge 0$; $\left(3^{x-1}+x^2\right)\left(3^{x-1}-81\right)\ge 0$; $x-1\ge 4$; $x\ge 5$.

Ответ: $[5;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

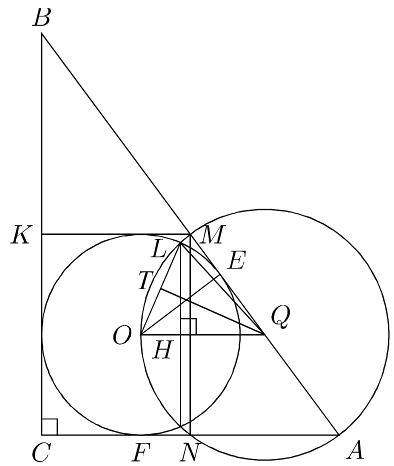
16 Дан треугольник ABC со сторонами $AB=40$, $AC=24$ и $BC=32$. Точки M и N — середины сторон AB и AC соответственно.

а) Докажите, что окружность, вписанная в треугольник ABC, касается одной из средних линий.

б) Найдите общую хорду окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая описана около треугольника AMN.

© СтатГрад 2018−2019 уч. г. Публикация в интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

Решение.



а) Из теоремы, обратной теореме Пифагора, следует, что треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине C. Пусть радиус его вписанной окружности равен r. Тогда

$$r=\frac{AC+BC-AB}{2}=\frac{24+32-40}{2}=8.$$

Пусть K — середина катета BC. Тогда расстояние между прямыми KM и AC равно длине отрезка MN, то есть 16. Значит, расстояние между этими прямыми равно диаметру вписанной в треугольник ABC окружности. Следовательно, эта окружность касается средней линии KM.

б) Треугольник AMN прямоугольный с прямым углом при вершине N, значит, центр описанной окружности треугольника AMN — середина Q отрезка AM, а радиус равен 10. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках E и F соответственно. Тогда

$$CF=r=8,\ AE=AF=AC-CF=24-8=16,\ EQ=AE-AQ=16-10=6,$$

$$OQ=\sqrt{OE^2+EQ^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10.$$

Пусть L — одна из точек пересечения рассматриваемых окружностей. Общая хорда пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров и делится ею пополам, значит, искомое расстояние равно удвоенной высоте LH треугольника OLQ со сторонами $OQ=10$, $OL=8$ и $QL=10$, проведённой из вершины L. Высота QT этого равнобедренного треугольника, опущенная на основание, является медианой, значит,

$$QT=\sqrt{LQ^2-LT^2}=\sqrt{10^2-4^2}=2\sqrt{21}.$$

© СтатГрад 2018−2019 уч. г. Публикация в интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

Поэтому

$$LH=\frac{OL\cdot QT}{OQ}=\frac{8\cdot 2\sqrt{21}}{10}=\frac{8\sqrt{21}}{5}.$$

Следовательно, искомое расстояние равно $\frac{16\sqrt{21}}{5}$.

Ответ: $\frac{16\sqrt{21}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q=0{,}5x^2+9x+15$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px-q$. При каком наименьшем значении p через 4 года суммарная прибыль может составить не менее 278 млн рублей?

Решение.

Прибыль (в млн рублей) за один год выражается как

$px-\left(0{,}5x^2+9x+15\right)=-0{,}5x^2+\left(p-9\right)x-15$.

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x=p-9$. Наибольшее значение равно $\frac{\left(p-9\right)^2}{2}-15$. Через 4 года прибыль составит не менее 278 млн рублей, если

$$\frac{\left(p-9\right)^2}{2}-15\geq\frac{278}{4};$$

откуда $\left(p-9\right)^2\geq169$; $\left(p-22\right)\left(p+4\right)\geq0$.

Цена продукции не может быть отрицательной, поэтому $p=22$.

Ответ: 22.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} y=\left(a+3\right)x^2+\left(2a+1\right)x+a, \\ x=\left(a+3\right)y^2+\left(2a+1\right)y+a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение.

Система не изменится, если поменять x и y местами. Следовательно, система имеет единственное решение, только если $x=y$. Получаем уравнение:

$$\left(a+3\right)x^2+2ax+a=0.$$

Это уравнение должно иметь единственный корень.

Если $a\neq-3$, то дискриминант должен равняться нулю:

$$\left(2a\right)^2-4a\left(a+3\right)=0;$$
$$12a=0,$$

откуда $a=0$.

При $a=0$ получаем $3x^2=0$, откуда $x=0$. Тогда решением системы является пара $\left(0;0\right)$.

Если $a=-3$, получается линейное уравнение $6x+3=0$, которое имеет единственное решение $x=-0{,}5$. Решением системы является пара $\left(-0{,}5;-0{,}5\right)$.

Покажем, что в этих случаях нет иных решений, где $x \neq y$. Вычтем второе уравнение системы из первого и разделим полученное уравнение почленно на $x - y \neq 0$:

$$-1 = (a+3)(x+y) + 2a + 1.$$

При $a = -3$ получается, что $a = 1$. Решений нет.

При $a = 0$ получаем $y = -\frac{2}{3} - x$. Подставим это выражение в первое уравнение системы:

$$-\frac{2}{3} - x = 3x^2 + x;\quad 9x^2 + 6x + 2 = 0.$$

Полученное уравнение не имеет корней.

Ответ: -3; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Присутствуют все шаги решения, получены верные значения параметра, но отсутствует доказательство того, что при каждом из них система имеет единственное решение	3
С помощью верного рассуждения получено только одно значение a	2
С помощью верного рассуждения задача сведена к исследованию квадратного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19

а) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\frac{2*4*6*9}{2*4*5*7}$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $-\frac{3}{4}$?

б) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\frac{1*2*4*6*8}{1*3*6*9*12}$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $-\frac{4}{5}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $\left|\frac{2}{3} - \frac{1*2*4*6*8}{1*3*6*9*12}\right|$, если всевозможными способами заменять каждый из знаков $*$ на + или –?

© СтатГрад 2018−2019 уч. г. Публикация в интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

Решение.

а) Да. Например, $\frac{2+4+6-9}{2-4+5-7} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$.

б) Рассмотрим какую-либо возможную расстановку знаков в знаменателе $1*3*6*9*12$ данной дроби. Имеем $1 \pm 3 \pm 6 \pm 9 \pm 12 = 1 + 3(\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4)$, где знаки + и – расставлены соответствующим образом. Сумма всех чисел в последних скобках чётна и может принимать значения вида $2m$, где m — некоторое целое число от -5 до 5. Значит, знаменатель дроби равен $6m + 1 = 5m + (m+1)$. Среди всех возможных значений m знаменатель делится на 5 при $m = -1$ и при $m = 4$. Следовательно, если знаки расставлены так, что данная дробь равна $-\frac{4}{5}$, то её знаменатель $1*3*6*9*12$ равен -5 или 25. Тогда её числитель $1*2*4*6*8$ равен либо -4, либо -20. Число $1 \pm 2 \pm 4 \pm 6 \pm 8$ всегда при делении на 2 даёт остаток 1, а числа 4 и -20 — остаток 0. Значит, расставить знаки требуемым образом невозможно.

в) Аналогично доказанному в пункте б) получаем, что при всевозможных расстановках знаков + и – выражение примет вид $\left|\frac{2}{3} - \frac{4k+1}{6m+1}\right|$, где k и m пробегают все целые числа от -5 до 5. Поскольку $\frac{2}{3} = \frac{4m + \frac{2}{3}}{6m+1}$, получаем $\left|\frac{2}{3} - \frac{4k+1}{6m+1}\right| = \left|\frac{4(m-k) - \frac{1}{3}}{6m+1}\right|$. При фиксированном значении m это выражение минимально при $k = m$. В этом случае оно равно $\left|\frac{1}{18m+3}\right|$. Так как m пробегает все целые числа от -5 до 5, максимум модуля $18m + 3$ достигается при $m = 5$. Значит, наименьшее значение, которое может принимать выражение $\left|\frac{2}{3} - \frac{1*2*4*6*8}{1*3*6*9*12}\right|$, если всевозможными способами заменять каждый из знаков $*$ на + или –, равно $\frac{1}{93}$. Оно достигается при $k = m = 5$ — в случае, когда каждый из знаков $*$ заменён на +.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) $\frac{1}{93}$.

© СтатГрад 2018−2019 уч. г. Публикация в интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *б* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© СтатГрад 2018–2019 уч. г. Публикация в интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена