Диагностическая работа №3 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
24 января 2019 года
Вариант МА10312
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

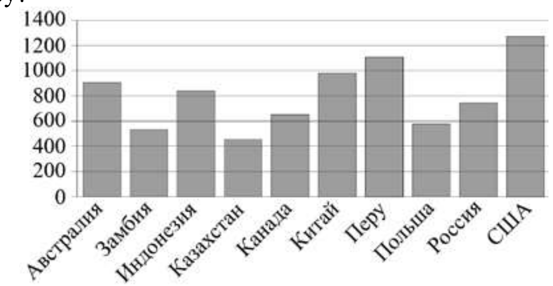
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Диагональ экрана телевизора равна 40 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

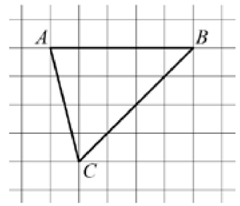
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показано распределение выплавки меди (в тысячах тонн) в 10 странах мира в 2006 году. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимало Перу?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AB.



Ответ: ___________________________.

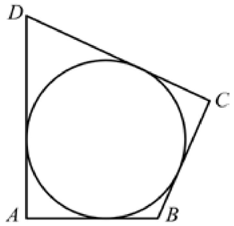
4 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент остановились. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 2, но не дойдя до отметки 5.

Ответ: ___________________________.

5 Решите уравнение $\frac{1}{3}x^2 = 16\frac{1}{3}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

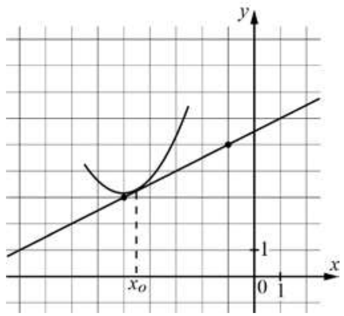
Ответ: ___________________________.

6 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 18$, $BC = 14$ и $CD = 25$. Найдите сторону AD.



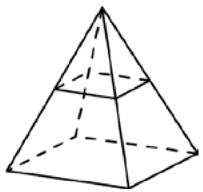
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

8 В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 70. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_a\left(a^2b^9\right)$, если $\log_a b = -4$.

Ответ: ___________________________.

10 Груз колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \cos\frac{2\pi t}{T}$ (в м/с), где t — время с момента начала колебаний (в с), $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 0{,}5$ м/с. Кинетическая энергия E груза массой m (в кг) равна $E = \frac{mv^2}{2}$ (в Дж), где v — скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза в момент времени $t = 4$ секунды после начала колебаний, если масса груза равна 0,4 кг. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: ___________________________.

11 Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 8 часов. Через 2 часа после того, как первый приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько всего часов работал первый рабочий?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции $y = \frac{4}{3}x\sqrt{x} - 10x + 6$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания* 13–19 *используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания* (13, 14 *и т. д.*), *а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=\cos 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

14 Дан прямой круговой цилиндр высотой 3 и радиусом 8. В одном из оснований проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом основании проведён диаметр CD, перпендикулярный прямой AB. Построено сечение цилиндра плоскостью $ABNM$, перпендикулярной прямой CD, причём точка C и центр основания цилиндра, содержащего отрезок CD, лежат по одну сторону от плоскости сечения.
а) Докажите, что диагонали четырёхугольника $ABNM$ равны.
б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

15 Решите неравенство
$$\log_5(x+2)^2\cdot\log_{\frac{1}{2}}x^2-4\log_5(x+2)+4\log_2(-x)+4\le 0.$$

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.
а) Докажите, что $\angle ABM=30°$.
б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC=6\sqrt{21}$.

17 По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 12 % сумму, имеющуюся на вкладе, а по вкладу «Б» увеличивает эту сумму на 13 % в течение каждого из первых двух лет. Какое наименьшее целое число процентов должен начислить банк по вкладу «Б» за третий год, чтобы вклад «Б» оказался выгоднее вклада «А»?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{x^4-16x^2+64a^2}=x^2+4x-8a$$
имеет ровно 3 корня.

19 У Вовы есть набор из n грузиков попарно различных натуральных масс в граммах и чашечные весы, которые находятся в равновесии, если на каждой из двух их чаш лежат грузики с одинаковыми суммарными массами. Известно, что, какие бы два из них ни положили на одну чашу весов, всегда можно положить на другую чашу один или несколько из оставшихся грузиков так, что весы уравновесятся.
а) Может ли у Вовы быть ровно 6 грузиков, среди которых есть грузик массой 7 г?
б) Может ли у Вовы быть ровно 5 грузиков?
в) Известно, что среди грузиков Вовы самый лёгкий грузик имеет массу 2 г. Какую наименьшую массу может иметь самый тяжёлый грузик Вовы?

Ответы на тренировочные варианты 10309-10312 (профильный уровень) от 24.01.2019

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10309	3	2	3	0,92	- 1	198	2	30	- 4	30	59	9
10310	4	3	2	0,93	- 1	102	3	78	- 5	15	55	13
10311	152	3	6	0,25	- 4	16	0,5	2500	- 77	0,18	8	36
10312	102	2	4	0,25	- 7	29	0,5	1225	- 34	0,05	5	25

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=\cos 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

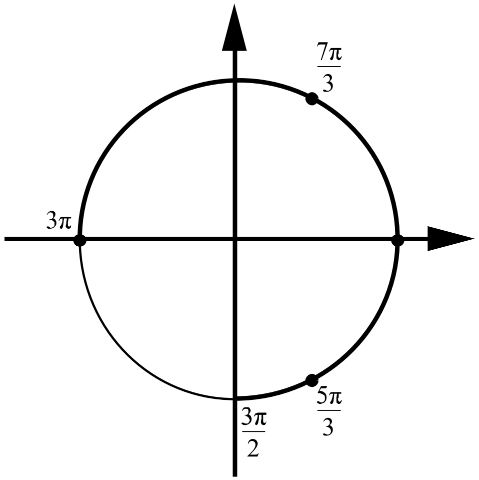
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos x+\cos 2x=0;\quad 2\cos^2 x+\cos x-1=0.$$

Значит, $\cos x=-1$ или $\cos x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\pi+2\pi n$ или $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, где $n,k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.



Получим числа $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; 3π.

Ответ: а) $\pi+2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, где $n,k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; 3π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

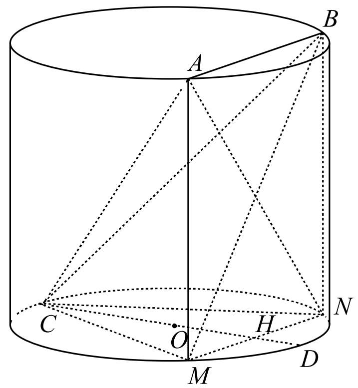
Дан прямой круговой цилиндр высотой 3 и радиусом 8. В одном из оснований проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом основании проведён диаметр CD, перпендикулярный прямой AB. Построено сечение цилиндра плоскостью $ABNM$, перпендикулярной прямой CD, причём точка C и центр основания цилиндра, содержащего отрезок CD, лежат по одну сторону от плоскости сечения.

а) Докажите, что диагонали четырёхугольника $ABNM$ равны.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

Решение.

а) Плоскость сечения $ABNM$ перпендикулярна прямой CD, поэтому отрезки AM и BN являются образующими цилиндра. Следовательно, отрезки AM и BN параллельны и равны, значит, $ABNM$ — параллелограмм. Так как прямые AM и BN перпендикулярны основаниям цилиндра и, в частности, прямой AB, параллелограмм $ABNM$ является прямоугольником. Отрезки AN и BM равны как диагонали прямоугольника, что и требовалось доказать.



б) Площадь прямоугольника $ABNM$ равна $3\cdot 8=24$. Пусть H — точка пересечения отрезков NM и CD, O — центр основания цилиндра, содержащего отрезок CD. Отрезок OH равен $\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$. Высота CH пирамиды $CABNM$ равна $8+4\sqrt{3}$. Следовательно, объём пирамиды $CABNM$ равен

$$\frac{1}{3}\cdot 24\cdot\left(8+4\sqrt{3}\right)=64+32\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $64+32\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\log_5(x+2)^2\cdot\log_{\frac{1}{2}}x^2-4\log_5(x+2)+4\log_2(-x)+4\le 0.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$-\log_5\left(x+2\right)\cdot\log_2(-x)-\log_5(x+2)+\log_2(-x)+1\le 0;$$

$$\left(1-\log_5\left(x+2\right)\right)\left(1+\log_2(-x)\right)\le 0;\quad \left(\log_5 5-\log_5\left(x+2\right)\right)\left(\log_2(-x)-\log_2\frac{1}{2}\right)\le 0;$$

$$\begin{cases}(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)\le 0,\\ -2<x<0,\end{cases}\quad \text{откуда } -\frac{1}{2}\le x<0.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\,0\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что $\angle ABM=30°$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC=6\sqrt{21}$.

Решение.

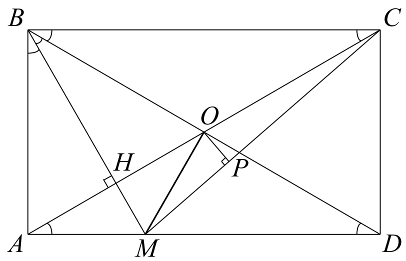
а) Пусть угол CBD между стороной и диагональю прямоугольника $ABCD$ равен α. Треугольник BMD равнобедренный, поэтому

$$\angle DBM=\angle BDM=\angle CBD=\alpha.$$

Прямоугольные треугольники ACB и BDA равны по катету и гипотенузе, поэтому $\angle ACB=\angle ADB=\alpha$.

Пусть H — точка пересечения отрезков BM и AC. Тогда BH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла. Значит, $\angle ABH=\angle ACB=\alpha$.

Следовательно, $\angle ABM=\frac{1}{3}\cdot 90°=30°$.



б) В прямоугольнике $ABCD$ имеем

$$AB=BC\,\mathrm{tg}\,30°=\frac{6\sqrt{21}}{\sqrt{3}}=6\sqrt{7},$$

$$AM=AB\,\mathrm{tg}\,30°=\frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{21},$$

$$MD=AD-AM=6\sqrt{21}-2\sqrt{21}=4\sqrt{21}.$$

Из прямоугольного треугольника CMD находим

$$MC=\sqrt{CD^2+MD^2}=\sqrt{\left(6\sqrt{7}\right)^2+\left(4\sqrt{21}\right)^2}=14\sqrt{3}.$$

Пусть O — центр прямоугольника $ABCD$. Расстояние от центра O прямоугольника $ABCD$ до прямой CM равно высоте OP треугольника CMO. Площадь треугольника CMO равна половине площади треугольника ACM:

$$S_{OCM}=\frac{1}{2}S_{ACM}=\frac{1}{4}AM\cdot AB=\frac{1}{2}CM\cdot OP, \text{ откуда}$$

$$OP=\frac{AM\cdot AB}{2MC}=\frac{2\sqrt{21}\cdot 6\sqrt{7}}{2\cdot 14\sqrt{3}}=3.$$

Ответ: б) 3.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 12 % сумму, имеющуюся на вкладе, а по вкладу «Б» увеличивает эту сумму на 13 % в течение каждого из первых двух лет. Какое наименьшее целое число процентов должен начислить банк по вкладу «Б» за третий год, чтобы вклад «Б» оказался выгоднее вклада «А»?

Решение.

Пусть на каждый вклад была внесена сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 12 %, то есть в 1,12 раза. Тогда через три года сумма на вкладе «А» будет равна $1{,}12^3S=1{,}404928S$. Аналогично на вкладе «Б» сумма через три года будет равна

$$1{,}13^2\left(1+\frac{n}{100}\right)S=1{,}2769\left(1+\frac{n}{100}\right)S,$$

где n — натуральное число процентов.

По условию требуется найти наименьшее целое решение неравенства

$$1{,}2769\left(1+\frac{n}{100}\right)S>1{,}404928S;$$

$$n>\frac{1404928-1276900}{12769}=10\frac{338}{12769}.$$

Следовательно, $n=11$.

Ответ: 11.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4-16x^2+64a^2}=x^2+4x-8a$$

имеет ровно 3 корня.

Решение.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}x^4-16x^2+64a^2=x^4+16x^2+64a^2+8x^3-16ax^2-64ax,\\ x^2+4x-8a\ge 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2ax(x+4)=x^2(x+4),\\ x^2+4x-8a\ge 0.\end{cases}$$

Из уравнения получаем $x=0$, $x=-4$ и $x=2a$.

Чтобы уравнение имело три различных корня, требуется, чтобы при $x=0$, $x=-4$ и $x=2a$ выполнялось неравенство $x^2+4x-8a\ge 0$, а также чтобы были выполнены условия $2a\ne -4$ и $2a\ne 0$.

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} (-4)^2-16-8a\ge 0,\\ 0^2+0-8a\ge 0,\\ 4a^2+8a-8a\ge 0,\\ 2a\ne -4,\\ 2a\ne 0;\end{cases} \quad \begin{cases} a\le 0,\\ a\ne -2,\\ a\ne 0,\end{cases}$$

откуда $a<-2$, $-2<a<0$.

Ответ: $a<-2$, $-2<a<0$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=0$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-\infty;0)$ с ошибочным включением точек $a=-2$ и/или $a=0$. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно найдены корни $x=-4$, $x=0$ и $x=2a$, но дальнейшее исследование не проведено или ошибочно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 У Вовы есть набор из n грузиков попарно различных натуральных масс в граммах и чашечные весы, которые находятся в равновесии, если на каждой из двух их чаш лежат грузики с одинаковыми суммарными массами. Известно, что, какие бы два из них ни положили на одну чашу весов, всегда можно положить на другую чашу один или несколько из оставшихся грузиков так, что весы уравновесятся.

а) Может ли у Вовы быть ровно 6 грузиков, среди которых есть грузик массой 7 г?

б) Может ли у Вовы быть ровно 5 грузиков?

в) Известно, что среди грузиков Вовы самый лёгкий грузик имеет массу 2 г. Какую наименьшую массу может иметь самый тяжёлый грузик Вовы?

Решение.

а) Если у Вовы есть грузики массами 3 г, 4 г, 5 г, 6 г, 7 г и 8 г, то условия задачи выполнены. Действительно, пусть выбраны грузики массами a и b граммов, $a<b$. Если $a\ne 3$ и $b\ne 8$, то уравновесить эти грузики можно двумя грузиками с массами $a-1$ и $b+1$ граммов. Если $b-a\ge 3$, то уравновесить эти грузики можно двумя грузиками с массами $a+1$ и $b-1$ граммов. Если $a=3$ и $b=4$, то эти грузики уравновешиваются грузиком массой 7 г. Если

$a=3$ и $b=5$, то эти грузики уравновешиваются грузиком массой 8 г. Если $a=6$ и $b=8$, то эти грузики уравновешиваются грузиками с массами 3 г, 4 г и 7 г. Наконец, если $a=7$ и $b=8$, то эти грузики уравновешиваются грузиками с массами 4 г, 5 г и 6 г.

б) Пусть у Вовы есть грузики массами (в граммах) a, b, c, d, e, причём $a<b<c<d<e$ и условия задачи выполнены. Грузики массами d и e можно уравновесить только тремя оставшимися грузиками. Значит, $a+b+c=d+e$. Аналогично грузики массами c и e можно уравновесить только тремя оставшимися грузиками. Значит, $a+b+e=d+c$. Вычитая левые и правые части двух полученных равенств, получаем $e-c=c-e$. Отсюда $c=e$, и мы приходим к противоречию.

в) По доказанному в пункте *б* у Вовы не может быть меньше 6 грузиков.

Предположим, что самые лёгкие шесть грузиков Вовы — это грузики массами (в граммах) 2, a, b, c, d, e, причём $2<a<b<c<d<e$ и условия задачи выполнены.

Допустим, что самый тяжёлый грузик весит 7 г. Тогда у Вовы есть ровно шесть грузиков с массами 2, 3, 4, 5, 6 и 7 г. Но в этом случае остальными грузиками нельзя уравновесить грузики массами 6 и 7 г. Следовательно, самый тяжёлый грузик весит не меньше 8 г.

Приведём пример подходящего набора: 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 г. Докажем, что любую пару грузиков можно уравновесить набором оставшихся. Пусть выбраны грузики массами a и b граммов, $a<b$. Если $a\ne 2$ и $b\ne 8$, то уравновесить эти грузики можно двумя грузиками с массами $a-1$ и $b+1$ граммов. Если $b-a\ge 3$, то уравновесить эти грузики можно двумя грузиками с массами $a+1$ и $b-1$ граммов. Для оставшихся пар выполняются равенства $2+3=5$, $2+4=6$, $6+8=3+4+7$, $7+8=4+5+6$.

Ответ: а) Да, например, 3 г, 4 г, 5 г, 6 г, 7 г и 8 г; б) нет; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4