Тренировочная работа №4 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
13 марта 2019 года
Вариант МА10410
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

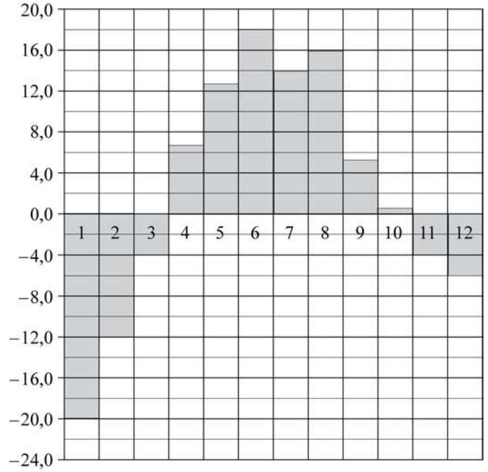
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Бегун пробежал 120 м за 15 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

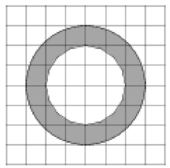
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной среднемесячной температурой в 1973 году.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 8. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ: ___________________________.

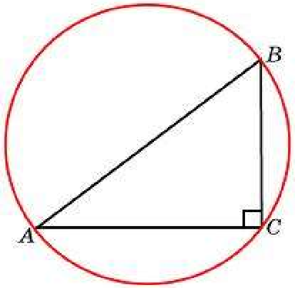
4 В классе 21 учащийся, среди них два друга — Вадим и Олег. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в одной группе.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $6^{2-5x} = 0{,}6 \cdot 10^{2-5x}$.

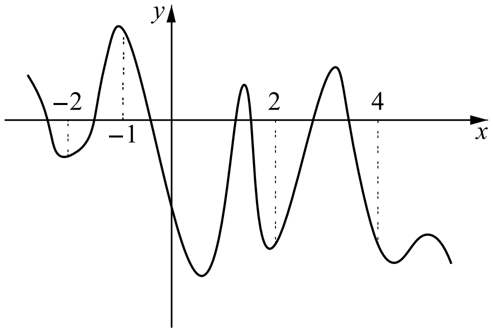
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 16$, $BC = 30$. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2, -1, 2, 4. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: ___________________________.

8 Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 6, боковое ребро равно 12. Найдите объём пирамиды.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите $\log_a \frac{a^4}{b^3}$, если $\log_a b = -14$.

Ответ: ___________________________.

10 Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на холме, видит горизонт на расстоянии 7,2 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 10,4 километров?

Ответ: ___________________________.

11 Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 100 км/ч, вторую треть — со скоростью 75 км/ч, а последнюю — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 169}$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin x$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 4. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

15 Решите неравенство $|x-1|-\frac{6}{|x-1|}\le 1$.

16 Дан треугольник ABC со сторонами $AC=6$, $BC=8$ и $AB=10$. Вписанная в него окружность с центром I касается стороны BC в точке L, M — середина BC, AP — биссектриса треугольника ABC, O — центр описанной около него окружности.

а) Докажите, что P — середина отрезка LM.

б) Пусть прямые OI и AC пересекаются в точке K, а продолжение биссектрисы AP пересекает описанную окружность в точке Q. Найдите площадь четырёхугольника $OKCQ$.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m, при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^3+2x^2-ax+4=0$$

имеет единственный корень на отрезке $[-1;2]$.

19 а) Приведите пример 5 различных натуральных чисел, расставленных по кругу так, что наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равно 30.

б) Можно ли расставить по кругу 8 различных натуральных чисел так, чтобы наименьшее общее кратное двух соседних чисел равнялось 450, а наибольший общий делитель любых трёх подряд идущих чисел равнялся 1?

в) Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел было равно 150?

Ответы на тренировочные варианты 10409-10412 (профильный уровень) от 13.03.2019

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10409	25,2	7	48	0,2	- 0,2	4	2	768	37	4,8	60	15
10410	28,8	5	10	0,3	0,2	17	2	324	46	4,4	75	13
10411	25000	14	17	0,0673	115	2,4	24	90	8	15	288	15
10412	30000	9	12	0,0294	87	4,8	17	63	9	45	768	20

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin x$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right]$.

Решение.

Запишем исходное уравнение в виде

$$\sin\left(x+x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin x;$$

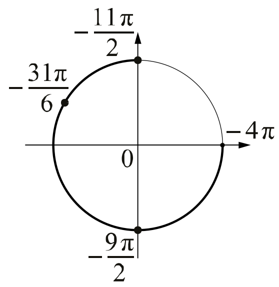
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin x=\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin x;$$

$$\cos x\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1\right)=0.$$

Значит, $\cos x=0$ или $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, где $k,n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right]$.

Получим числа $-\frac{11\pi}{2}$, $-\frac{31\pi}{6}$, $-\frac{9\pi}{2}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, где $k,n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{2}$, $-\frac{31\pi}{6}$, $-\frac{9\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 4. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

Решение.

а) Найдём стороны треугольника ATC_1:

$$AT=\sqrt{16+4}=\sqrt{20},$$

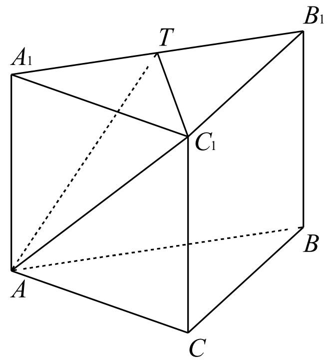
$$TC_1=\sqrt{16-4}=\sqrt{12},$$

$$AC_1=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}.$$

Заметим, что

$$AC_1^2=32=12+20=AT^2+TC_1^2.$$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ATC_1 является прямоугольным.



б) Так как прямая C_1T перпендикулярна прямым A_1T и AT, угол A_1TA искомый. Найдём тангенс угла A_1TA:

$$\operatorname{tg}\angle A_1TA=\frac{AA_1}{A_1T}=\frac{4}{2}=2.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg}2$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\left|x-1\right|-\dfrac{6}{\left|x-1\right|}\le 1$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{\left|x-1\right|^2-\left|x-1\right|-6}{\left|x-1\right|}\le 0;\quad \frac{\left(\left|x-1\right|+2\right)\left(\left|x-1\right|-3\right)}{\left|x-1\right|}\le 0;$$

$$\left|x-1\right|-3\le 0 \quad \text{при условии } x\ne 1.$$

Решение неравенства: $-2\le x<1$, $1<x\le 4$.

Ответ: $\left[-2;1\right)$; $\left(1;\,4\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Дан треугольник ABC со сторонами $AC=6$, $BC=8$ и $AB=10$. Вписанная в него окружность с центром I касается стороны BC в точке L, M — середина BC, AP — биссектриса треугольника ABC, O — центр описанной около него окружности.

а) Докажите, что P — середина отрезка LM.

б) Пусть прямые OI и AC пересекаются в точке K, а продолжение биссектрисы AP пересекает описанную окружность в точке Q. Найдите площадь четырёхугольника $OKCQ$.

Решение.

а) Из теоремы, обратной теореме Пифагора, следует, что треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине C. Пусть D — точка касания вписанной окружности треугольника с катетом AC, r — радиус этой окружности. Тогда $CDIL$ — квадрат, поэтому

$$CL=IL=r=\frac{AC+BC-AB}{2}=2.$$

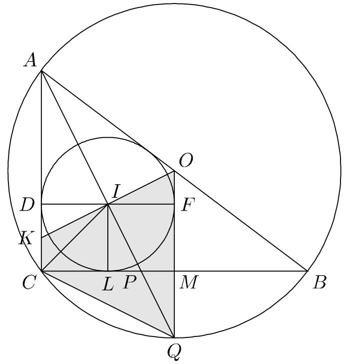
По свойству биссектрисы треугольника $CP:PB=AC:AB=3:5$, поэтому

$$CP=\frac{3}{8}BC=3.$$

Значит,

$$LP=CP-CL=1,\ \ PM=CM-CP=1.$$

Следовательно, $LP=PM$, что и требовалось доказать.



б) Центр O окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы, а так как точка Q — середина дуги BC описанной окружности этого треугольника, точки Q, M и O лежат на серединном перпендикуляре к катету BC.

Пусть F — проекция точки I на среднюю линию OM треугольника ABC. Тогда

$$OF=OM-FM=OM-IL=1,$$

$$OI=\sqrt{OF^2+IF^2}=\sqrt{OF^2+LM^2}=\sqrt{5}.$$

Отрезок CI — биссектриса треугольника ACP, поэтому $AI:IP=AC:CP=2:1$. Значит,

$$AI=\frac{2}{3}AP=\frac{2}{3}\sqrt{AC^2+CP^2}=2\sqrt{5}.$$

Треугольник AIO прямоугольный с прямым углом при вершине I, так как

$$AO^2=25=20+5=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2=OI^2+AI^2,$$

поэтому отрезок AI перпендикулярен отрезку OK, то есть биссектриса AI треугольника OAK является его высотой. Значит, $OA = OK = 5$.

Четырёхугольник $OKCQ$ — трапеция с основаниями $CK = AC - AK = 1$, $OQ = OA = OB = 5$ и высотой $CM = \frac{1}{2}BC = 4$. Следовательно, $S_{OKCQ} = \frac{CK + OQ}{2} \cdot CM = 12$.

(Примечание. Доказательство того, что отрезок AI перпендикулярен отрезку OK, может быть таким. Середина L отрезка CM — проекция точки I на прямую BC, а отрезок CM — проекция отрезка AQ на эту прямую. Значит, I — середина хорды AQ описанной окружности треугольника ABC. Следовательно, отрезок AI перпендикулярен отрезку OK.)

Ответ: б) 12.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m, при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

Решение.

К началу 2-го года получится $1{,}15 \cdot 10 + n = 11{,}5 + n$ млн рублей, а к началу 3-го года —

$$1{,}15(11{,}5 + n) + n = 13{,}225 + 2{,}15n.$$

По условию $13{,}225 + 2{,}15n \geq 20$. Наименьшее целое решение: $n = 4$. Тогда к началу 3-го года получится

$$13{,}225 + 8{,}6 = 21{,}825 \text{ млн.}$$

К началу 4-года имеем $1{,}15 \cdot 21{,}825 + m$ млн рублей, а в конце проекта —

$$1{,}15\left(1{,}15 \cdot 21{,}825 + m\right) + m = 1{,}3225 \cdot 21{,}825 + 2{,}15m = 28{,}8635625 + 2{,}15m.$$

По условию $28{,}8635625 + 2{,}15m \geq 30$. Получаем, что $m = 1$ — наименьшее целое решение.

Ответ: 4 и 1 млн руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 2x^2 - ax + 4 = 0$$

имеет единственный корень на отрезке $[-1; 2]$.

Решение.

Число $x = 0$ не является корнем уравнения ни при каком значении a. Поэтому уравнение равносильно уравнению

$$a = x^2 + 2x + \frac{4}{x}.$$

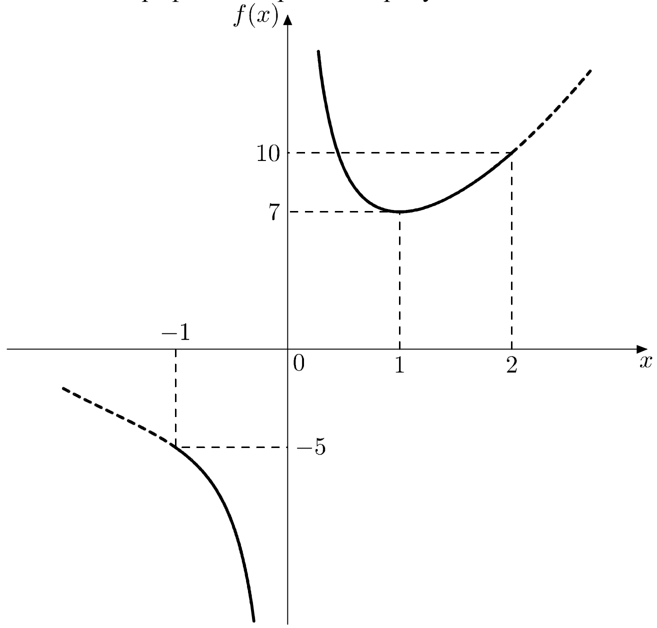
Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 + 2x + \frac{4}{x}$$

и исследуем её поведение на отрезке $-1 \leq x \leq 2$. Функция определена при всех $x \neq 0$. Найдём производную:

$$f'(x) = 2x + 2 - \frac{4}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2 + 2x + 2)}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точке $x=1$. На промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;1]$ функция убывает, а на промежутке $[1;+\infty)$ — возрастает. Следовательно, точка $x=1$ — единственная точка минимума, значение в этой точке равно 7. Эскиз графика изображён на рисунке.



Найдем значения функции в концах отрезка: $f(-1)=-5$ и $f(2)=10$. Поэтому

– если $a\le -5$, то график функции $y=f(x)$ и прямая $y=a$ имеют единственную общую точку при $-1\le x<0$;
– если $-5<a<7$ общих точек нет;
– если $a=7$ линии имеют единственную общую точку $(1;7)$;
– если $7<a\le 10$, то линии имеют две различные общие точки при $0<x\le 2$;
– если $a>10$, то линии имеют одну общую точку при $0<x\le 2$ и ещё одну при $x>2$.

Ответ: $a\le -5$, $a=7$ и $a>10$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *a*, но некоторые граничные точки включены/исключены неверно	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения *a*	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения графика функции и прямой (аналитически или графически)	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 а) Приведите пример 5 различных натуральных чисел, расставленных по кругу так, что наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равно 30.
б) Можно ли расставить по кругу 8 различных натуральных чисел так, чтобы наименьшее общее кратное двух соседних чисел равнялось 450, а наибольший общий делитель любых трёх подряд идущих чисел равнялся 1?
в) Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел было равно 150?

Решение.
а) 2; 15; 10; 3; 30.
б) Нет. Каждое число в круге должно являться делителем числа 450. Поскольку $450=2\cdot 3^2\cdot 5^2$, делителей всего $2\cdot 3\cdot 3=18$, включая 1 и 450. Наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел должно равняться 450, поэтому рядом с числом 1 может стоять только 450 и число 1 не может находиться в круге. Среди делителей числа 450 есть 6 делителей, кратных 3 и не кратных 9, 6 делителей, кратных 5 и не кратных 25, и 2 делителя, кратных 15 и не кратных 225. Поэтому 10 чисел среди делителей числа 450 кратны 3 или 5 и не кратны их квадратам. Среди 8 чисел, выписанных в круг, не будет числа 1, поэтому там будет хотя бы одно число, кратное 3 или 5 и не кратное их квадратам. Рядом с таким числом с обеих сторон будут стоять числа, кратные тому же простому числу (3 или 5), поэтому наибольший общий делитель этих трёх подряд идущих чисел будет больше 1.
в) Каждое число, выписанное в круг, обязано быть делителем числа 150. У числа $150=2\cdot 3\cdot 5^2$ всего 12 делителей, считая 150 и 1. Среди этих делителей есть простое число 5, на квадрат которого делится 150. Рядом с числом 5 может стоять только число 150, чтобы их наименьшее общее кратное равнялось 150 (число, стоящее рядом с 5, должно делиться и на 2, и на 3, и на 5^2), поэтому 5 не может быть написано. Рядом с числами 2 и 10 могут быть написаны только числа 75 и 150, поэтому если в круге больше 4 чисел, то 2 и 10 не могут одновременно находиться в круге. Аналогично 3 и 15 не могут быть написаны одновременно, поскольку рядом с ними могут быть написаны только числа 50 и 150. Значит, всего может быть выписано в круг не более 8 чисел. Пример чисел 150; 15; 50; 30; 25; 6; 75; 10 показывает, что наибольшее искомое количество чисел равно 8.

Ответ: а) Например, 2; 15; 10; 3; 30; б) нет; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4