Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
10 – 11 класс
17 мая 2019 года
Вариант МА00511
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа включает в себя 19 заданий и состоит из двух частей.

Ответом в заданиях части 1 (1–12) является целое число, или десятичная дробь, или последовательность цифр. Запишите ответ в отведённом для него месте на листе с заданиями.

В заданиях части 2 (13–19) требуется записать полное решение на отдельном чистом листе.

При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором.

При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут.

Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий. Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

Желаем успеха!

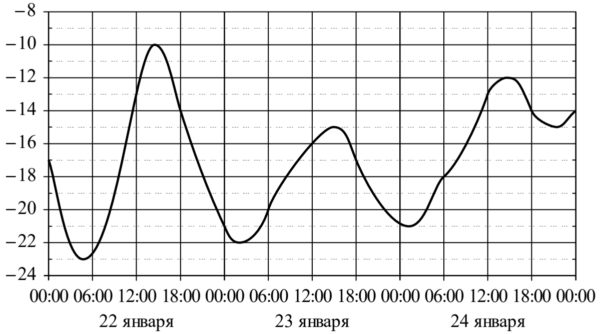
Часть 1

В заданиях 1–12 дайте ответ в виде целого числа, или десятичной дроби, или последовательности цифр.

1 Таксист за месяц проехал 5000 км. Цена бензина — 32,5 рублей за литр. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

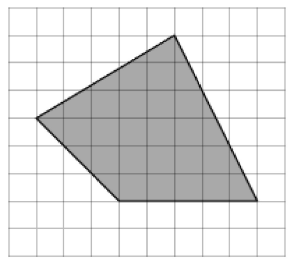
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 24 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь четырехугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рисунок).



Ответ: ___________________________.

4 В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 9. Результат округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

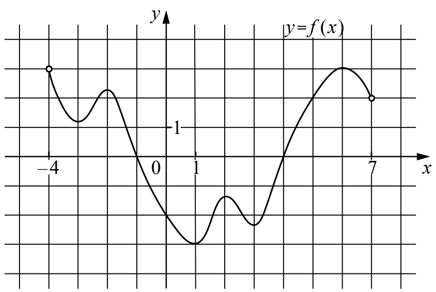
5 Найдите корень уравнения $x=\frac{8x+36}{x+13}$.
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, $AB=14$, $\sin A=0{,}96$. Найдите AC.

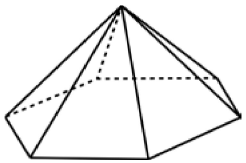
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-4;7)$. Найдите наибольший корень уравнения $f'(x)=0$.



Ответ: ___________________________.

8 Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 50, боковые рёбра равны 65. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения $5^{\frac{2}{9}}\cdot 25^{\frac{7}{18}}$.

Ответ: ___________________________.

10 Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет неотрицательной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P=m\left(\frac{v^2}{L}-g\right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g=10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 250 см? Ответ выразите в м/с.

Ответ: ___________________________.

11 Два принтера печатают одинаковый текст. Первый принтер печатает в минуту 20 страниц текста, а второй — 24 страницы. Они одновременно начали, но первый принтер закончил печать на 37 секунд позже, чем второй. Сколько страниц в тексте?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2+6x+15}$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

В заданиях 13–19 запишите полное решение на отдельном чистом листе.

13 а) Решите уравнение $\left(2-3x-2x^2\right)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

14 Плоскость α проходит через середину ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно прямой BD_1.
а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью ABC равен углу между прямыми BB_1 и B_1D.
б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC, если объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $48\sqrt{3}$, $AB=2\sqrt{3}$ и $AD=6$.

15 Решите неравенство $\dfrac{18-x^2-3x}{x^2+6x}\le 1+\dfrac{3}{x+2}$.

16 На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.
а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.
б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 54 и известно отношение $AC : AB = 5 : 4$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что в пятый месяц кредитования нужно выплатить 44 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|x-a|+2|y-a|=5,\\ xy-x-y+1=0\end{cases}$$

име ет ровно три различных решения.

19 а) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n, что десятичная запись числа n^2+4n оканчивается всеми цифрами числа n, записанными в том же порядке.
б) Может ли такое число оканчиваться цифрой 1?
в) Найдите все такие четырёхзначные числа.

Ответы на тренировочные варианты 00509-00512 (профильный уровень) от 17.05.2019

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
00509	98	7	10,5	0,007	8	1	1	18	6	24	3	- 3
00510	156	4	17	0,008	3	0,75	- 6	6	2	10	1	- 5
00511	14625	- 12	27	0,12	- 9	25	6	9000	5	5	74	- 3
00512	16320	- 15	24,5	0,14	- 5	15	2	720	4	4,5	49	- 4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\left(2-3x-2x^2\right)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

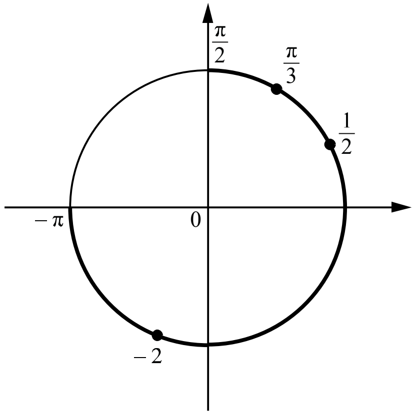
Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$(x+2)(1-2x)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0.$$

Значит, $x=-2$, $x=\frac{1}{2}$ или $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$.

б) Заметим, что $-\pi<-2<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2}$. С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.



Получим -2; $\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{3}$.

Ответ: а) -2; $\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $n,k\in\mathbb{Z}$; б) -2; $\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

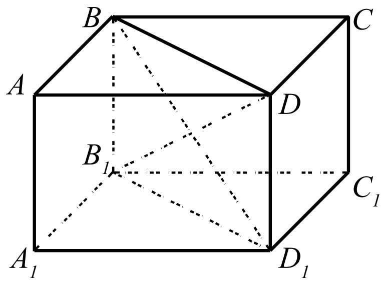
14 Плоскость α проходит через середину ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно прямой BD_1.

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью ABC равен углу между прямыми BB_1 и B_1D.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC, если объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $48\sqrt{3}$, $AB=2\sqrt{3}$ и $AD=6$.

Решение.

а) В прямоугольнике BB_1D_1D угол BB_1D равен углу BD_1D. Прямая D_1D перпендикулярна плоскости ABC. Прямая BD_1 перпендикулярна плоскости α. Угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Поэтому искомый угол равен углу между прямыми BB_1 и B_1D.



б) Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $AB\cdot AD\cdot AA_1=48\sqrt{3}$. Следовательно, $DD_1=AA_1=\frac{48\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot 6}=4$. Рассмотрим прямоугольный треугольник BD_1D. Его катеты равны $DD_1=4$ и $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+6^2}=4\sqrt{3}$.

Значит, $\angle BD_1D = \operatorname{arctg}\dfrac{BD}{DD_1} = \operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt{3}}{4} = \operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

Следовательно, $\angle BD_1D = 60°$.

Ответ: б) 60°.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\dfrac{18-x^2-3x}{x^2+6x} \le 1+\dfrac{3}{x+2}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x+5}{x+2}+\frac{x^2+3x-18}{x^2+6x} \ge 0; \qquad \frac{x+5}{x+2}+\frac{(x+6)(x-3)}{x(x+6)} \ge 0.$$

Тогда $\begin{cases} \dfrac{x+5}{x+2}+\dfrac{x-3}{x} \ge 0, \\ x \ne -6, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} \dfrac{(x+3)(x-1)}{x(x+2)} \ge 0, \\ x \ne -6. \end{cases}$

Решая неравенство, получаем $x \in (-\infty; -6);\ (-6; -3];\ (-2; 0);\ [1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -6);\ (-6; -3];\ (-2; 0);\ [1; +\infty)$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 На продолжении стороны *AC* за вершину *A* треугольника *ABC* отложен отрезок *AD*, равный стороне *AB*. Прямая, проходящая через точку *A* параллельно *BD*, пересекает сторону *BC* в точке *M*.

а) Докажите, что *AM* — биссектриса угла *BAC*.

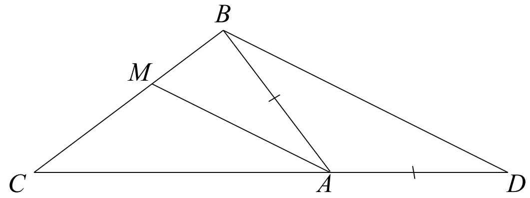
б) Найдите площадь трапеции *AMBD*, если площадь треугольника *ABC* равна 54 и известно отношение *AC* : *AB* = 5 : 4.

Решение.

а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABD + \angle ADB = \alpha$. Треугольник *ABD* равнобедренный, поэтому $\angle ADB = \angle ABD = \dfrac{\alpha}{2}$, а так как *AM* параллельна *BD*,

$$\angle MAC = \angle BDC = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Следовательно, *AM* — биссектриса угла *BAC*.



б) По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{CM}{MB} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4},$$

значит,

$$\frac{S_{ACM}}{S_{ABC}} = \frac{CM}{CB} = \frac{5}{9}, \quad S_{ACM} = \frac{5}{9}S_{ABC} = \frac{5}{9}\cdot 54 = 30.$$

Треугольник *DCB* подобен треугольнику *ACM* с коэффициентом $\dfrac{9}{5}$, поэтому

$$S_{DCB} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 S_{ACM} = \frac{81}{25}\cdot 30 = 97{,}2.$$

Следовательно,

$$S_{AMBD} = S_{DCB} - S_{ACM} = 97{,}2 - 30 = 67{,}2.$$

Ответ: б) 67,2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что в пятый месяц кредитования нужно выплатить 44 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

Решение.
Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:
$S;\ \frac{8S}{9};\ \ldots;\ \frac{2S}{9};\ \frac{S}{9};\ 0.$
Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:
$1{,}04S;\ 1{,}04\cdot\frac{8S}{9};\ \ldots;\ 1{,}04\cdot\frac{2S}{9};\ 1{,}04\cdot\frac{S}{9}.$
Следовательно, выплаты должны быть следующими:
$\frac{9\cdot 0{,}04S+S}{9};\ \frac{8\cdot 0{,}04S+S}{9};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}04S+S}{9};\ \frac{0{,}04S+S}{9}.$

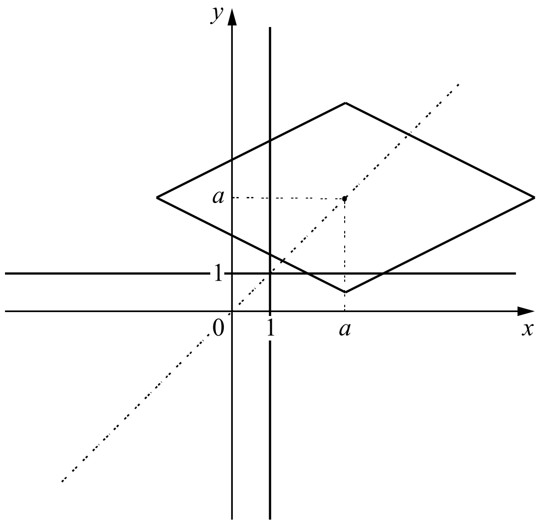
В пятый месяц выплата составит $\frac{5\cdot 0{,}04\cdot S+S}{9}=\frac{1{,}2S}{9}$. А всего следует выплатить
$$S+S\cdot 0{,}04\left(1+\frac{8}{9}+\ldots+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)=S\left(1+\frac{10\cdot 0{,}04}{2}\right)=1{,}2S.$$
Значит, банку нужно вернуть $44\,000\cdot 9=396\,000$ рублей.

Ответ: 396 000 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения *a*, при каждом из которых система
$$\begin{cases}|x-a|+2|y-a|=5,\\ xy-x-y+1=0\end{cases}$$
имеет ровно три различных решения.

Решение.
Первое уравнение задаёт на координатной плоскости ромб с диагоналями 10 и 5, параллельными осям *Ox* и *Oy* соответственно, и с центром в точке $(a;a)$.
Второе уравнение задаёт две прямые $x=1$ и $y=1$.



Система имеет ровно три решения в одном из двух случаев: либо одна из прямых пересекает ромб в двух точках, а вторая проходит через только одну из его вершин, либо точка пересечения прямых лежит на стороне ромба, но не в его вершине. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1. Если нижняя или верхняя вершина лежит на прямой $y=1$, то $a=1+2{,}5=3{,}5$ или $a=1-2{,}5=-1{,}5$, а центр ромба удалён от прямой $x=1$ на $2{,}5$, поэтому прямая $x=1$ пересекает ромб в двух точках.

Если левая или правая вершина лежит на прямой $x=1$, то $a=1+5=6$ или $a=1-5=-4$, а центр ромба удалён от прямой $y=1$ на 5, поэтому прямая $y=1$ не пересекает ромб.

2. Точка пересечения прямых не должна совпасть с вершиной ромба, то есть $a\neq 1$. Подставим $x=1$, $y=1$ в уравнение:

$$3|a-1|=5, \text{ откуда } a=\frac{8}{3} \text{ или } a=-\frac{2}{3}.$$

Оба значения удовлетворяют условию $a\neq 1$, а потому при каждом из этих значений a система имеет ровно три решения.

Ответ: $-1{,}5$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{8}{3}$; $3{,}5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но из-за арифметической ошибки одно из них неверно	3

Рассмотрен только один из двух возможных случаев взаимного расположения двух прямых и ромба: когда точка пересечения прямых лежит на стороне ромба или когда одна прямая проходит через вершину ромба, а вторая пересекает ромб в двух точках. ИЛИ Не исключён случай, когда точка пересечения прямых лежит в вершине ромба	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения двух прямых и ромба	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 а) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n, что десятичная запись числа n^2+4n оканчивается всеми цифрами числа n, записанными в том же порядке.

б) Может ли такое число оканчиваться цифрой 1?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа.

Решение.

а) Например, число 7.

б) Предположим, что $n=10k+1$. Тогда

$$n^2+4n=100k^2+20k+1+40k+4=10l+5,$$

то есть десятичная запись числа n^2+4n оканчивается цифрой 5. Значит, такое невозможно.

в) Запишем условие задачи в таком виде: $n^2+4n=n+N\cdot 10000$ и преобразуем полученное уравнение:

$$n^2+3n=N\cdot 10000, \text{ т. е. } n\cdot(n+3)=2^4\cdot 5^4\cdot N.$$

Числа n и $n+3$ не могут одновременно делиться на 2 и не могут одновременно делиться на 5. Значит, один из множителей делится на 5^4 и один из множителей делится на 2^4. Эти два множителя могут совпадать только в том случае, если число n четырёхзначное, а $n+3$ делится на 10000, то есть $n=9997$.

Если $n\neq 9997$, мы должны подобрать два числа, одно из которых делится на 16, а другое на 625 и одно из которых больше другого на 3.

Переберём нечётные четырёхзначные числа, кратные числу 625: 1875, 3125, 4375, 5625, 6875, 8125, 9375. Среди них только 1875 имеет вид $16k+3$ и только 8125 имеет вид $16k-3$.

Значит, искомое число равняется 1872, 8125 или 9997.

Ответ: а) 7; б) нет; в) 1872; 8125; 9997.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4