Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
10 – 11 класс
17 мая 2019 года
Вариант МА00512
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа включает в себя 19 заданий и состоит из двух частей.

Ответом в заданиях части 1 (1–12) является целое число, или десятичная дробь, или последовательность цифр. Запишите ответ в отведённом для него месте на листе с заданиями.

В заданиях части 2 (13–19) требуется записать полное решение на отдельном чистом листе.

При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором.

При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут.

Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий. Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

Желаем успеха!

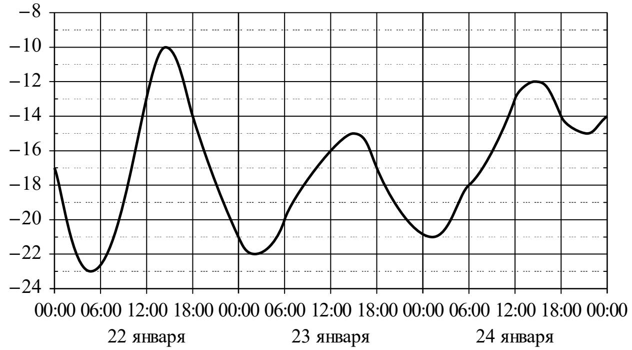
Часть 1

В заданиях 1–12 дайте ответ в виде целого числа, или десятичной дроби, или последовательности цифр.

1 Таксист за месяц проехал 6000 км. Цена бензина — 34 рубля за литр. Средний расход бензина на 100 км составляет 8 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

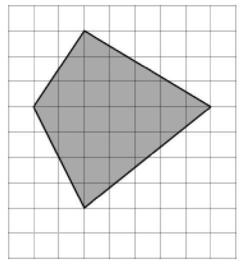
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 23 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рисунок).



Ответ: ___________________________.

4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6. Результат округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

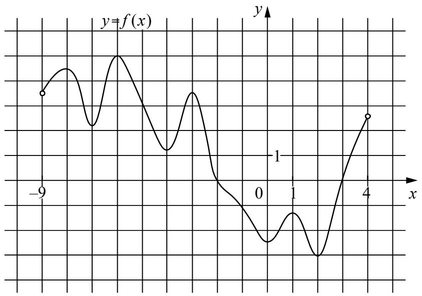
5 Найдите корень уравнения $x=\frac{9x-20}{x+18}$.
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, $AB=18$, $\sin A=0{,}8$. Найдите AC.

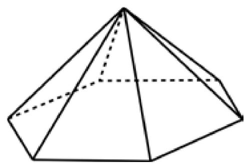
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-9;4)$. Найдите наибольший корень уравнения $f'(x)=0$.



Ответ: ___________________________.

8 Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 16, боковые рёбра равны 17. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения $4^{\frac{1}{6}}\cdot 16^{\frac{5}{12}}$.

Ответ: ___________________________.

10 Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет неотрицательной. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P=m\left(\frac{v^2}{L}-g\right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g=10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 202,5 см? Ответ выразите в м/с.

Ответ: ___________________________.

11 Два принтера печатают одинаковый текст. Первый принтер печатает в минуту 12 страниц текста, а второй — 21 страницу. Они одновременно начали, но первый принтер закончил печать на 1 минуту 45 секунд позже, чем второй. Сколько страниц в тексте?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2+8x+27}$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

В заданиях 13–19 запишите полное решение на отдельном чистом листе.

13 а) Решите уравнение $\left(3x^2-19x+20\right)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

14 Плоскость α проходит через середину ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно прямой BD_1.

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью ABC равен углу между прямыми BB_1 и B_1D.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC, если объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $10\sqrt{33}$, $AB=\sqrt{11}$ и $AD=5$.

15 Решите неравенство $\frac{20+x-x^2}{x^2-5x}\le 1-\frac{2}{x-1}$.

16 На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 216 и известно отношение $AC:AB=5:4$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в восьмой месяц кредитования нужно выплатить 29 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3|x-2a|+2|y-a|=6, \\ xy-x-2y+2=0 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

19 а) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n, что десятичная запись числа n^2+2n оканчивается всеми цифрами числа n, записанными в том же порядке.

б) Может ли такое число оканчиваться цифрой 3?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа.

Ответы на тренировочные варианты 00509-00512 (профильный уровень) от 17.05.2019

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
00509	98	7	10,5	0,007	8	1	1	18	6	24	3	- 3
00510	156	4	17	0,008	3	0,75	- 6	6	2	10	1	- 5
00511	14625	- 12	27	0,12	- 9	25	6	9000	5	5	74	- 3
00512	16320	- 15	24,5	0,14	- 5	15	2	720	4	4,5	49	- 4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\left(3x^2-19x+20\right)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

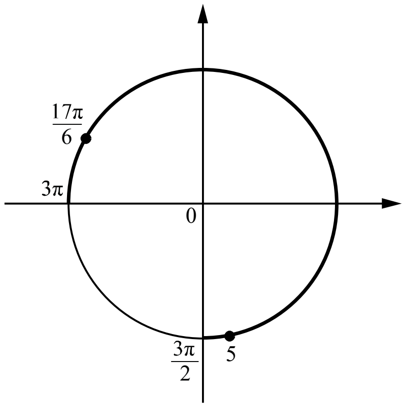
Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$(x-5)(3x-4)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)=0.$$

Значит, $x=5$, $x=\frac{4}{3}$ или $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) Заметим, что $\frac{4}{3}<2<\frac{3\pi}{2}<5<3\pi$. С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.



Получим 5; $\frac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) 5; $\frac{4}{3}$; $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) 5; $\frac{17\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

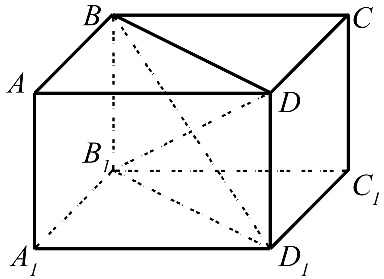
14 Плоскость α проходит через середину ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно прямой BD_1.

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью ABC равен углу между прямыми BB_1 и B_1D.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC, если объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $10\sqrt{33}$, $AB=\sqrt{11}$ и $AD=5$.

Решение.

а) В прямоугольнике BB_1D_1D угол BB_1D равен углу BD_1D. Прямая D_1D перпендикулярна плоскости ABC. Прямая BD_1 перпендикулярна плоскости α. Угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Поэтому искомый угол равен углу между прямыми BB_1 и B_1D.



б) Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $AB\cdot AD\cdot AA_1=10\sqrt{33}$.

Следовательно, $DD_1=AA_1=\frac{10\sqrt{33}}{\sqrt{11}\cdot 5}=2\sqrt{3}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник BD_1D. Его катеты равны $DD_1=2\sqrt{3}$, $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2+5^2}=6$.

Значит, $\angle BD_1D=\operatorname{arctg}\frac{BD}{DD_1}=\operatorname{arctg}\frac{6}{2\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

Следовательно, $\angle BD_1D=60°$.

Ответ: б) $60°$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\frac{20+x-x^2}{x^2-5x}\le 1-\frac{2}{x-1}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x-3}{x-1}+\frac{x^2-x-20}{x^2-5x}\ge 0;\qquad \frac{x-3}{x-1}+\frac{(x+4)(x-5)}{x(x-5)}\ge 0.$$

Тогда $\begin{cases}\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+4}{x}\ge 0,\\ x\ne 5,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}\frac{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}{x(x-1)}\ge 0,\\ x\ne 5.\end{cases}$

Решая неравенство, получаем $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right];\ (0;1);\ \left[\sqrt{2};5\right);\ (5;+\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right];\ (0;1);\ \left[\sqrt{2};5\right);\ (5;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16

На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

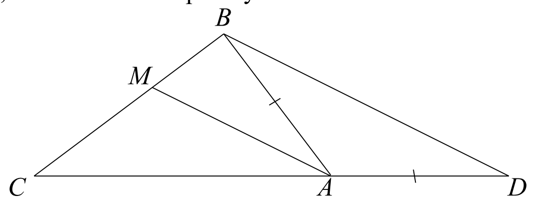
б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 216 и известно отношение $AC:AB=5:4$.

Решение.

а) Обозначим $\angle BAC=\alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABD+\angle ADB=\alpha$. Треугольник ABD равнобедренный, поэтому $\angle ADB=\angle ABD=\frac{\alpha}{2}$, а так как AM параллельна BD,

$$\angle MAC=\angle BDC=\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\angle BAC.$$

Следовательно, AM — биссектриса угла BAC.



б) По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{CM}{MB}=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{4},$$

значит,

$$\frac{S_{ACM}}{S_{ABC}}=\frac{CM}{CB}=\frac{5}{9},\quad S_{ACM}=\frac{5}{9}S_{ABC}=\frac{5}{9}\cdot 216=120.$$

Треугольник DCB подобен треугольнику ACM с коэффициентом $\frac{9}{5}$, поэтому

$$S_{DCB}=\left(\frac{9}{5}\right)^2 S_{ACM}=\frac{81}{25}\cdot 120=388{,}8.$$

Следовательно,

$$S_{AMBD}=S_{DCB}-S_{ACM}=388{,}8-120=268{,}8.$$

Ответ: б) 268,8.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ Привет, обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в восьмой месяц кредитования нужно выплатить 29 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$S;\ \frac{14S}{15};\ \ldots;\ \frac{2S}{15};\ \frac{S}{15};\ 0.$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$1{,}04S;\ 1{,}04\cdot\frac{14S}{15};\ \ldots;\ 1{,}04\cdot\frac{2S}{15};\ 1{,}04\cdot\frac{S}{15}.$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$\frac{15\cdot 0{,}04S+S}{15};\ \frac{14\cdot 0{,}04S+S}{15};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}04S+S}{15};\ \frac{0{,}04S+S}{15}.$

В восьмой месяц выплата составит $\frac{8\cdot 0{,}04\cdot S+S}{15}=\frac{1{,}32S}{15}$. А всего следует выплатить

$S+S\cdot 0{,}04\left(1+\frac{14}{15}+\ldots+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}\right)=S\left(1+\frac{16\cdot 0{,}04}{2}\right)=1{,}32S.$

Значит, банку нужно вернуть $29\,000\cdot 15=435\,000$ рублей.

Ответ: 435 000 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

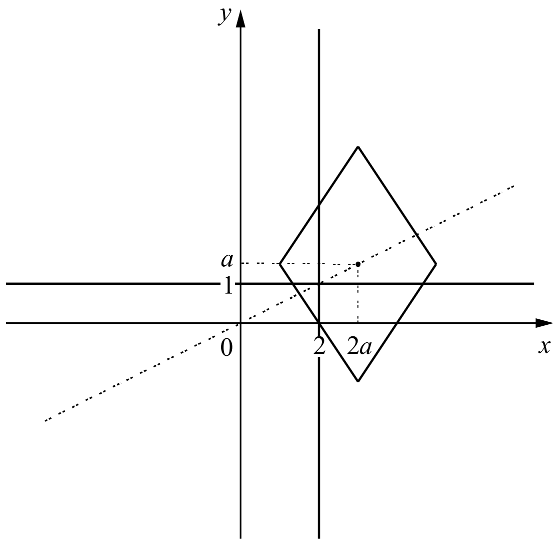
18 Найдите все значения *a*, при каждом из которых система

$$\begin{cases}3|x-2a|+2|y-a|=6,\\ xy-x-2y+2=0\end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение задаёт на координатной плоскости ромб с диагоналями 4 и 6, параллельными осям Ox и Oy соответственно, и с центром в точке $(2a;a)$. Второе уравнение задаёт две прямые $x=2$ и $y=1$.



Система имеет ровно три решения в одном из двух случаев: либо одна из прямых пересекает ромб в двух точках, а вторая проходит через только одну из его вершин, либо точка пересечения прямых лежит на стороне ромба, но не в его вершине. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1. Если нижняя или верхняя вершина лежит на прямой $y=1$, то $a=1+3=4$ или $a=1-3=-2$. Центр ромба удалён от прямой $x=2$ на 6, поэтому прямая $x=2$ не пересекает ромб.

Если левая или правая вершина лежит на прямой $x=2$, то $a=\frac{2+2}{2}=2$ или $a=\frac{2-2}{2}=0$, а центр ромба удалён от прямой $y=1$ на 1, поэтому прямая $y=1$ пересекает ромб в двух точках.

2. Точка пересечения прямых не должна совпасть с вершиной ромба, то есть $a\neq 1$. Подставим $x=2$, $y=1$ в уравнение:

$$8|a-1|=6\text{, откуда } a=\frac{1}{4} \text{ или } a=\frac{7}{4}.$$

Оба значения удовлетворяют условию $a\neq 1$, а потому при каждом из этих значений a система имеет ровно три решения.

Ответ: 0; $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{4}$; 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но из-за арифметической ошибки одно из них неверно	3
Рассмотрен только один из двух возможных случаев взаимного расположения двух прямых и ромба: когда точка пересечения прямых лежит на стороне ромба или когда одна прямая проходит через вершину ромба, а вторая пересекает ромб в двух точках. ИЛИ Не исключен случай, когда точка пересечения прямых лежит в вершине ромба	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения двух прямых и ромба	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 а) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n, что десятичная запись числа n^2+2n оканчивается всеми цифрами числа n, записанными в том же порядке.

б) Может ли такое число оканчиваться цифрой 3?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа.

Решение.

а) Например, число 9.

б) Предположим, что $n=10k+3$. Тогда

$$n^2+2n=100k^2+60k+9+20k+6=10l+15,$$

то есть десятичная запись числа n^2+2n оканчивается цифрой 5. Значит, такое невозможно.

в) Запишем условие задачи в таком виде: $n^2+2n=n+N\cdot 10000$, преобразуем:

$$n^2+n=N\cdot 10000\text{, т. е. } n\cdot(n+1)=2^4\cdot 5^4\cdot N.$$

Заметим, что n и $n+1$ не могут одновременно делиться на 2 и не могут одновременно делиться на 5. Значит, один из множителей делится на 5^4 и один из множителей делится на 2^4. Эти два множителя могут совпадать только в том случае, если число $n+1$ делится на 10000, а число n четырёхзначное, то есть $n=9999$.

Если $n\neq 9999$, мы должны подобрать два числа, одно из которых делится на 16, а другое на 625 и одно из которых больше другого на 1.

Переберём нечётные четырёхзначные числа, кратные числу 625: 1875, 3125, 4375, 5625, 6875, 8125, 9375. Из них только число 9375 имеет вид $16k-1$, а чисел вида $16k+1$ среди них нет.

Значит, искомое число может равняться 9375 или 9999.

Ответ: а) 9; б) нет; в) 9375; 9999.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4