Тренировочная работа №1 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

25 сентября 2019 года

Вариант МА1910109

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

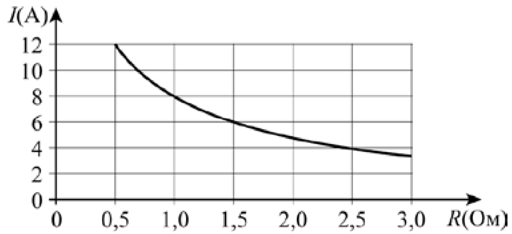
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 5 %. Книга стоит 500 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

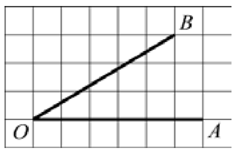
Ответ: ___________________________.

2 Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. На сколько ампер уменьшится сила тока, если увеличить сопротивление с 0,5 Ом до 2,5 Ом?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



Ответ: ___________________________.

4 В группе туристов 20 человек. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 5 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист Ф. полетит вторым рейсом вертолёта.

Ответ: ___________________________.

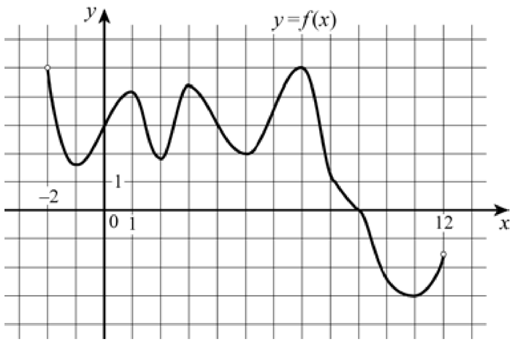
5 Найдите корень уравнения $(x+3)^3=-8$.

Ответ: ___________________________.

6 Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 12. Синус острого угла трапеции равен 0,8. Найдите боковую сторону.

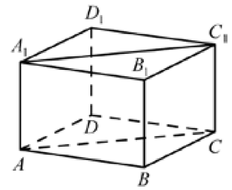
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-2;12)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: ___________________________.

8 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 равно 15, а диагональ BD_1 равна 25. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A, A_1 и C.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{3^{6,2}}{9^{1,6}}$.

Ответ: ___________________________.

10 После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h=5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

Ответ: ___________________________.

11 Первый садовый насос перекачивает 9 литров воды за 4 минуты, второй насос перекачивает тот же объём воды за 6 минут. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 30 литров воды?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=15+12x+x^3$ на отрезке $[-2;2]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(1-3\operatorname{tg}^2 x\right)\sqrt{7\sin x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с равными сторонами AB и BC. Точки K и M — середины рёбер A_1B_1 и AC соответственно.

а) Докажите, что $KM=KB$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB=8$, $AC=6$ и $AA_1=3$.

15 Решите неравенство $\dfrac{2^{2x+2}-9\cdot 2^{x+2}+32}{2^{x+3}-2^{2x}}\le\dfrac{3}{2^x}$.

16 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN:BC=2:5$, а $BN=14$.

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+5=2(2x+y),\\ a^2+ax+2ay=5 \end{cases}$$

имеет решение.

19 Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 3111.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна 17.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 109?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 1910109-1910112 (профильный уровень) от 25.09.2019

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1910109	475	8	0,6	0,25	- 5	5	7	300	27	1	8	- 17
1910110	570	2	0,75	0,2	- 12	7,5	7	108	8	2,2	6	- 23
1910111	4	1	2,5	0,3	5	15	1,5	60	24	10000	72	30
1910112	2	4	3	0,25	0,2	27	1,25	60	54	4000	60	38

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

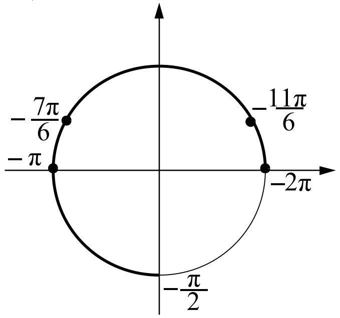
13 а) Решите уравнение $\left(1-3\operatorname{tg}^2 x\right)\sqrt{7\sin x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

Рассмотрим два случая.

1. Если $\sin x=0$, то $x=\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.



2. Если $\sin x\neq 0$, то $\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{3},\\ \sin x>0\end{cases}$ $\begin{cases}\operatorname{tg}x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\\ \sin x>0\end{cases}$ откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$,

где $k,m\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности.

Получаем -2π; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $-\pi$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$; πn, $n,k,m\in\mathbb{Z}$; б) -2π; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $-\pi$.

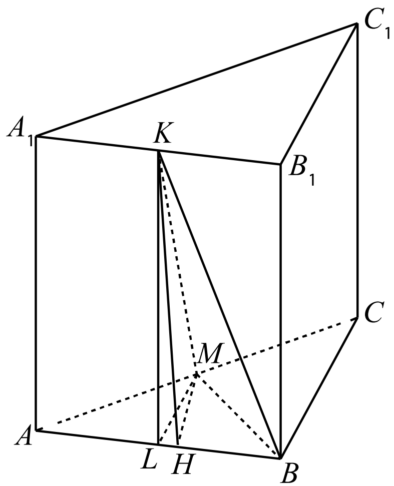
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с равными сторонами AB и BC. Точки K и M — середины рёбер A_1B_1 и AC соответственно.

а) Докажите, что $KM=KB$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB=8$, $AC=6$ и $AA_1=3$.

Решение.



а) Пусть L — середина ребра AB. Треугольник AMB прямоугольный, поэтому его медиана LM равна половине гипотенузы и равна LB. Из равенства треугольников KLM и KLB следует, что $KM=KB$.

б) Пусть MH — высота в треугольнике AMB. Прямая MH перпендикулярна прямым AB и BB_1, следовательно она перпендикулярна плоскости ABB_1 и угол $\angle HKM$ искомый. Вычисляя двумя способами площадь треугольника AMB, получим $MH\cdot AB=MA\cdot MB$, откуда

$MH=\frac{MA\cdot MB}{AB}=\frac{3\sqrt{8^2-3^2}}{8}=\frac{3\sqrt{55}}{8}$, поэтому

$$\sin\angle HKM=\frac{HM}{KM}=\frac{HM}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3\sqrt{55}}{40}=\frac{3\sqrt{11}}{8\sqrt{5}}.$$

Ответ: б) $\arcsin\frac{3\sqrt{11}}{8\sqrt{5}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\dfrac{2^{2x+2}-9\cdot 2^{x+2}+32}{2^{x+3}-2^{2x}}\le\dfrac{3}{2^x}$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{4\cdot 2^{2x}-36\cdot 2^x+32}{2^x\left(8-2^x\right)}\le\frac{3}{2^x};\quad \frac{4\left(2^x-8\right)\left(2^x-1\right)}{2^x\left(8-2^x\right)}\le\frac{3}{2^x};\quad \begin{cases}4\cdot 2^x-4\ge -3,\\ x\ne 3;\end{cases}\quad \begin{cases}2^x\ge\dfrac{1}{4},\\ x\ne 3,\end{cases}$$

откуда $-2\le x<3$, $x>3$.

Ответ: $[-2;3)$, $(3;+\infty)$

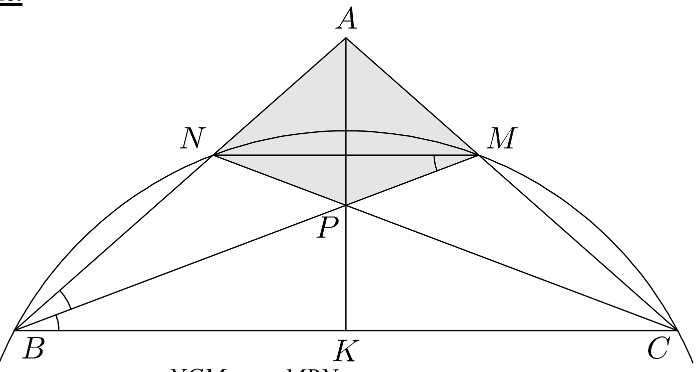
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN:BC=2:5$, а $BN=14$.

Решение.



а) Вписанные углы NCM и MBN опираются на одну и ту же дугу, следовательно, они равны. Поскольку $\frac{1}{2}\angle ACB=\angle MCN=\angle MBN=\frac{1}{2}\angle ABC$, получаем $\angle ACB=\angle ABC$, то есть треугольник ABC равнобедренный.

б) Поскольку $\angle BCN=\angle MCN=\angle MBN=\angle MBC$, получаем, что $BN=NM=MC=14$ и прямая MN параллельна прямой BC. Отрезок BC равен 35.

Пусть AK — биссектриса, медиана и высота треугольника ABC. Прямая AK проходит через точку P — центр вписанной окружности.

Треугольник ANM подобен треугольнику ABC, следовательно,

$$\frac{AN}{AB}=\frac{MN}{BC}=\frac{2}{5}.$$

Тогда

$$AB=\frac{5}{3}BN=\frac{70}{3},$$

$$AK=\sqrt{AB^2-BK^2}=\sqrt{\left(\frac{70}{3}\right)^2-\left(\frac{35}{2}\right)^2}=\frac{35\sqrt{7}}{6}.$$

Площадь треугольника ABC равна

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AK\cdot BC=\frac{1}{2}PK\cdot\left(AB+AC+BC\right),$$

а значит

$$PK=\frac{AK\cdot BC}{AB+AC+BC}=\frac{\frac{35\sqrt{7}}{6}\cdot 35}{\frac{70}{3}+\frac{70}{3}+35}=\frac{5\sqrt{7}}{2},$$

$$AP=AK-PK=\frac{35\sqrt{7}}{6}-\frac{5\sqrt{7}}{2}=\frac{10\sqrt{7}}{3}.$$

В четырёхугольнике $AMPN$ диагонали AP и MN перпендикулярны, следовательно, его площадь равна

$$S_{AMPN}=\frac{1}{2}AP\cdot MN=\frac{1}{2}\cdot\frac{10\sqrt{7}}{3}\cdot 14=\frac{70\sqrt{7}}{3}.$$

Ответ: : б) $\frac{70\sqrt{7}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10 %, т. е. увеличивается в 1,1 раза. Поэтому через три года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1{,}1^3S=1{,}331S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1{,}08\left(1+\frac{n}{100}\right)^2S,$$

где n — некоторое натуральное число процентов.

По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1{,}08\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)^2S>1{,}331S,$$

$$\left(1+\frac{n}{100}\right)^2>\frac{1331}{1080}=1{,}2324...$$

При $n=12$ неравенство

$$1{,}12^2>1{,}2324...;\quad 1{,}2544>1{,}2324...$$

верно, а при $n=11$ неравенство

$$1{,}11^2>1{,}2324...;\quad 1{,}2321>1{,}2324...$$

неверно, как и при всех меньших n.

Ответ: 12.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения *a*, при каждом из которых система

$$\begin{cases}x^2+y^2+5=2(2x+y),\\ a^2+ax+2ay=5\end{cases}$$

имеет решение.

Решение.

Преобразуем первое уравнение системы:

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1=0;\ (x-2)^2+(y-1)^2=0.$$

Данное уравнение имеет только одно решение $x=2$, $y=1$.

Подставим данные значения во второе уравнение системы:

$$a^2+4a-5=0.$$

Следовательно, $a=-5$, $a=1$.

Ответ: $a=-5$, $a=1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *a*, но решение содержит арифметическую ошибку	3

С помощью верного рассуждения получены все решения первого уравнения системы, правильно составлено второе уравнение системы	2
Задача верно сведена к исследованию возможных значений корней первого уравнения системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 3111.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна 17.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 109?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

Решение.

а) Примером таких чисел являются числа 4228 и 4211.

б) Предположим, что такие числа существуют. Рассмотрим какие-либо два таких интересных числа. Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись большего из них, $\overline{pqrs}$ — десятичная запись меньшего из них, а k — та из цифр a, b, c и d, которая равна сумме трёх других. Тогда сумма цифр этого числа равна $2k$, то есть чётна. Аналогично получаем, что сумма цифр меньшего из рассматриваемых интересных чисел также чётна. Так как $s \neq 0$, имеем $d \neq 9$, отсюда получаем $d = s - 1$, $c = r + 1$. Так как $b \neq 0$, имеем $q \neq 9$, поэтому $b = q + 1$, $a = p$.

Таким образом, числа $a + b + c + d$ и $p + q + r + s$ разной чётности. Приходим к противоречию.

в) Покажем, что искомое число равно 11. Для этого сначала приведём пример интересного четырёхзначного числа, кратного 2, — это число 1124, и числа, кратного 3, 5 и 7, — это число 9135.

Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись какого-либо интересного числа, кратного 11. Тогда $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 11(91a + 9b + c) + (b - a + d - c)$.

Получаем, что число $b - a + d - c$ кратно 11. Поскольку a, b, c и d — цифры, отсюда следует, что либо $b + d = a + c$, либо эти две суммы отличаются на 11. Составим две пары чисел: a и c, b и d. Пусть k — та из цифр a, b, c и d, которая равна сумме трёх других, l — та из них, которая

в паре с k. Пусть также m и n — две оставшиеся из цифр a, b, c и d. Поскольку $k = l + m + n$, имеем $k + l > m + n$. Значит, $k + l = m + n + 11$. Вычитая из этого равенства равенство $k = l + m + n$, получаем $l = 11 - l$, и, следовательно, $2l = 11$. Пришли к противоречию. Значит, не существует интересных четырёхзначных чисел, кратных 11.

Ответ: а) 4228 и 4211; б) нет; в) 11.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4