Тренировочная работа №1 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
25 сентября 2019 года
Вариант МА1910112
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

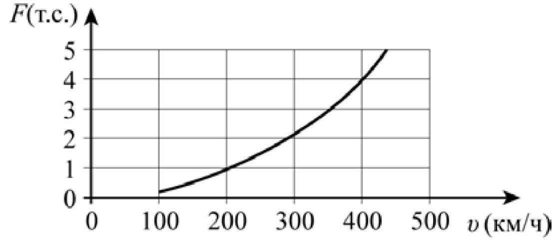
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 В доме, в котором живёт Ася, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 3 квартиры. Ася живёт в квартире № 38. В каком подъезде живёт Ася?

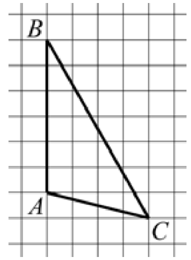
Ответ: ___________________________.

2 Когда самолёт находится в горизонтальном полёте, подъёмная сила, действующая на крылья, зависит от скорости движения. На рисунке изображена эта зависимость для некоторого самолёта. На оси абсцисс откладывается скорость (в километрах в час), на оси ординат — сила (в тоннах силы). Определите по рисунку, чему равна подъёмная сила (в тоннах силы) при скорости 400 км/ч.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB.



Ответ: ___________________________.

4 В классе 9 учащихся, среди них два друга — Михаил и Андрей. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Михаил и Андрей окажутся в одной группе.

Ответ: ____________________________.

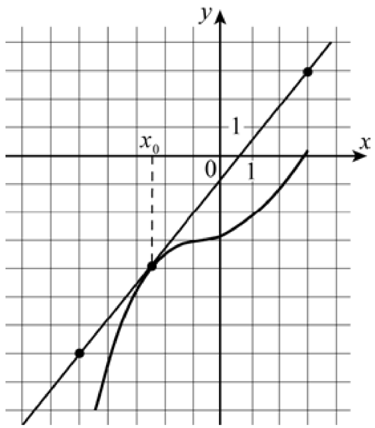
5 Найдите корень уравнения $\frac{1}{9x+5}=\frac{1}{4x+6}$.

Ответ: ____________________________.

6 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 36. Точка E — середина стороны CD. Найдите площадь трапеции $ABED$.

Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ____________________________.

8 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $DB_1=2C_1D_1$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и AC_1. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $36\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$.

Ответ: ____________________________.

10 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому $P=\sigma ST^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma=5{,}7\cdot10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{64}\cdot10^{20}$ м^2, а мощность её излучения равна $2{,}28\cdot10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

Ответ: ____________________________.

11 Автомобиль выехал с постоянной скоростью 72 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 360 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 270 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 30 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=-\frac{5x^2+12x}{x}$ на отрезке $[-10;-1]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(5\pi+2x\right)=3$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.
а) Докажите, что прямая BQ перпендикулярна прямой B_1P.

б) Пусть H — проекция точки Q на прямую B_1P. Найдите B_1H, если $AB=24$.

15 Решите неравенство $\frac{4x^4-4x^3+x^2}{-2x^2+5x-2}+\frac{2x^3-7x^2+5x+1}{x-2}\le 0$.

16 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.
а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

б) Найдите радиус данной окружности, если $\angle A=135^\circ$, $B_1C_1=10$ и площадь треугольника AB_1C_1 в семь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

17 15 сентября планируется взять кредит в банке на 12 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,59 млн рублей?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y=\frac{5a-15x+ax}{x^2-2ax+a^2+25}$ содержит отрезок $[0;1]$.

19 На доске написаны все пятизначные числа, в десятичной записи которых по одному разу встречаются цифры 4, 5, 6, 7 и 8 (45678, 45687 и т. д.).
а) Есть ли среди них число, которое делится на 55?
б) Есть ли среди них число, которое делится на 505?
в) Найдите наибольшее из этих чисел, делящееся на 11.

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 1910109-1910112 (профильный уровень) от 25.09.2019

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1910109	475	8	0,6	0,25	- 5	5	7	300	27	1	8	- 17
1910110	570	2	0,75	0,2	- 12	7,5	7	108	8	2,2	6	- 23
1910111	4	1	2,5	0,3	5	15	1,5	60	24	10000	72	30
1910112	2	4	3	0,25	0,2	27	1,25	60	54	4000	60	38

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

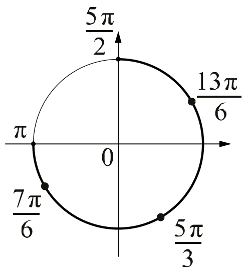
13 а) Решите уравнение $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(5\pi+2x\right)=3$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

Запишем исходное уравнение в виде $\mathrm{tg}\left(5\pi+2x\right)=\sqrt{3}$; $\mathrm{tg}\,2x=\sqrt{3}$, откуда $2x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, то есть $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

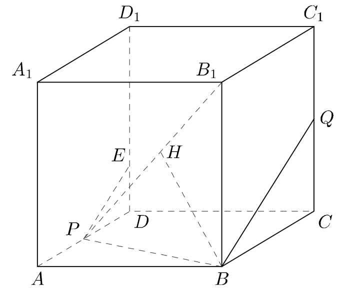
14 Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что прямая BQ перпендикулярна прямой B_1P.

б) Пусть H — проекция точки Q на прямую B_1P. Найдите B_1H, если $AB=24$.

Решение.

а) Пусть ребро куба равно $4a$. Отметим на ребре DD_1 такую точку E, что $DE=a$. Прямая PE параллельна прямой BQ, следовательно необходимо проверить, что $\angle EPB_1=90^\circ$.



По теореме Пифагора вычислим длины сторон треугольника EPB_1:

$PE^2=PD^2+DE^2=5a^2$,

$B_1E^2=B_1D_1^{\,2}+D_1E^2=32a^2+9a^2=41a^2$,

$B_1P^2=B_1B^2+BA^2+AP^2=16a^2+16a^2+4a^2=36a^2$, $B_1P=6a$.

Поскольку $5a^2+36a^2=41a^2=B_1E^2=PE^2+B_1P^2$, по теореме, обратной теореме Пифагора, получаем, что $\angle EPB_1=90^\circ$, т. е. прямая BQ перпендикулярна прямой B_1P.

б) Поскольку прямая BQ перпендикулярна прямой B_1P, проекции точек B и Q на прямую B_1P совпадают. В прямоугольном треугольнике BB_1P имеем

$\cos\angle HB_1B=\frac{HB_1}{B_1B}=\frac{B_1B}{PB_1}$, откуда $HB_1=\frac{B_1B^2}{PB_1}=\frac{576}{36}=16$.

Ответ: б) 16.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\dfrac{4x^4-4x^3+x^2}{-2x^2+5x-2}+\dfrac{2x^3-7x^2+5x+1}{x-2}\le 0$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{4x^4-4x^3+x^2}{-2x^2+5x-2}+\frac{2x^3-7x^2+5x+1}{x-2}\le 0;$$

$$\frac{x^2(2x-1)^2}{(2x-1)(2-x)}+\frac{2x^3-7x^2+5x+1}{x-2}\le 0;$$

$$\begin{cases}\dfrac{-6x^2+5x+1}{x-2}\le 0,\\ x\ne\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{(6x+1)(x-1)}{x-2}\ge 0,\\ x\ne\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

$$\left[-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2};1\right],\ (2;+\infty).$$

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2};1\right]$, $(2;+\infty)$.

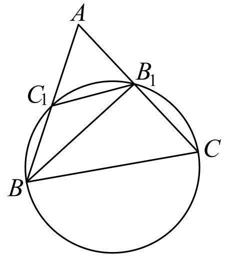
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

б) Найдите радиус данной окружности, если $\angle A=135^\circ$, $B_1C_1=10$ и площадь треугольника AB_1C_1 в семь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

Решение.



а) Заметим, что $\angle AB_1C_1+\angle C_1B_1C=180^\circ$. Четырёхугольник BCB_1C_1 вписан в окружность, поэтому $\angle C_1BC+\angle C_1B_1C=180^\circ$.

Значит, $\angle AB_1C_1=\angle C_1BC=\angle ABC$. Следовательно, треугольники ABC и AB_1C_1 подобны по двум углам.

б) Площадь треугольника AB_1C_1 в семь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1, поэтому площадь треугольника ABC в восемь раз больше площади треугольника AB_1C_1 и коэффициент подобия этих треугольников равен $2\sqrt{2}$.

Пусть $AB_1=x$, тогда $AB=2\sqrt{2}x$. Найдём BB_1 по теореме косинусов:

$$BB_1^2=x^2+8x^2-4\sqrt{2}x\cdot x\cdot\cos 135^\circ=13x^2.$$ Следовательно, $BB_1=x\sqrt{13}$.

Теперь по теореме синусов из треугольника ABB_1 получаем

$$\frac{AB}{\sin\angle AB_1B}=\frac{BB_1}{\sin\angle A};\qquad \sin\angle AB_1B=\frac{AB}{BB_1}\sin\angle A.$$

Но $\sin\angle AB_1B=\sin\angle BB_1C$, поскольку синусы смежных углов равны.

Получаем

$$\sin\angle BB_1C=\frac{AB}{BB_1}\sin\angle A=\frac{2\sqrt{2}x}{x\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Теперь находим радиус окружности, описанной около треугольника BCB_1:

$$2R=\frac{BC}{\sin\angle BB_1C}=10\sqrt{26};\ R=5\sqrt{26}.$$

Ответ: б) $5\sqrt{26}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 сентября планируется взять кредит в банке на 12 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,59 млн рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна *S*. Долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$S;\ \frac{11}{12}S;\ \frac{10}{12}S;\ \ldots;\ \frac{1}{12}S;\ 0.$

По условию 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5 %. Значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$1{,}05S;\ 1{,}05\cdot\frac{11}{12}S;\ 1{,}05\cdot\frac{10}{12}S;\ \ldots;\ 1{,}05\cdot\frac{1}{12}S.$

Таким образом, выплаты должны быть следующими:

$0{,}05S+\frac{S}{12};\ \frac{11\cdot 0{,}05S+S}{12};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}05S+S}{12};\ \frac{0{,}05S+S}{12}.$

Всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0{,}05\left(1+\frac{11}{12}+\ldots+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}\right)=S\left(1+\frac{13\cdot 0{,}05}{2}\right)=1{,}325S.$$

По условию $1{,}325S=1{,}59$ млн рублей. Значит, сумма, взятая в кредит, равна 1,2 млн рублей.

Ответ: 1,2 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых множество значений функции $y=\frac{5a-15x+ax}{x^2-2ax+a^2+25}$ содержит отрезок $[0;1]$.

Решение.

Запишем функцию в виде $y=\frac{5a-(15-a)x}{(x-a)^2+25}$. Если при некоторых значениях *a* существуют такие числа x_0, x_1, что выполняются равенства $0=\frac{5a-(15-a)x_0}{(x_0-a)^2+25}$ и $1=\frac{5a-(15-a)x_1}{(x_1-a)^2+25}$, то отрезок [0; 1] будет принадлежать множеству значений данной функции.

Первое уравнение: $0=\frac{5a-(15-a)x}{(x-a)^2+25}$; $(15-a)x=5a$. Уравнение имеет решение при любом $a\neq 15$.

Второе уравнение: $1=\frac{5a-(15-a)x}{(x-a)^2+25}$; $x^2+3(5-a)x+a^2-5a+25=0$.

Уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен $D=9(5-a)^2-4(a^2-5a+25)\geq 0$; $5(a^2-14a+25)\geq 0$; $\left(a-7+2\sqrt{6}\right)\left(a-7-2\sqrt{6}\right)\geq 0$. Решение этого неравенства: $\left(-\infty;\ 7-2\sqrt{6}\right]$, $\left[7+2\sqrt{6};+\infty\right)$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют только все значения $a\in\left(-\infty;\ 7-2\sqrt{6}\right]$, $\left[7+2\sqrt{6};15\right)$, $\left(15;+\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty;\ 7-2\sqrt{6}\right]$, $\left[7+2\sqrt{6};15\right)$, $\left(15;+\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написаны все пятизначные числа, в десятичной записи которых по одному разу встречаются цифры 4, 5, 6, 7 и 8 (45678, 45687 и т. д.).

а) Есть ли среди них число, которое делится на 55?

б) Есть ли среди них число, которое делится на 505?

в) Найдите наибольшее из этих чисел, делящееся на 11.

Решение.

а) Да. Например, число $47685 = 55 \cdot 867$.

б) Предположим, что такое число есть и его десятичная запись имеет вид $\overline{abcde}$, где a, b, c, d и e — это различные, расставленные в некотором (возможно, ином) порядке цифры 4, 5, 6, 7 и 8. Поскольку число $\overline{abcde}$ делится на $505 = 101 \cdot 5$, получаем, что оно делится на 101 и 5.

Значит, $e = 5$. Имеем $\overline{abcde} = \overline{abcd5} = 100 \cdot \overline{abc} + \overline{d5} = 101 \cdot \overline{abc} - \left(\overline{abc} - \overline{d5}\right)$.

Следовательно, разность $\overline{abc} - \overline{d5}$ делится на 101 и найдётся такое натуральное число $k \le 9$, что $\overline{abc} - \overline{d5} = 101 \cdot k$. Так как c может принимать значения 4, 6, 7 или 8, отсюда получаем, что k может принимать значения 9, 1, 2 или 3 соответственно. Если $k = 9$, то $a = 9$. Если $k \le 3$, то $a \le 3$. Пришли к противоречию.

в) Пусть $\overline{abcde}$ — это десятичная запись какого-либо числа с доски. Имеем

$$\overline{abcde} = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e =$$
$$= (a - b + c - d + e) + 11 \cdot (a \cdot 909 + b \cdot 91 + c \cdot 9 + d).$$

Число $\overline{abcde}$ делится на 11 тогда и только тогда, когда число $a - b + c - d + e$ делится на 11. Сумма цифр каждого из чисел с доски равна $a + b + c + d + e = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$. Значит, $a - b + c - d + e = 30 - 2(b + d)$. Поскольку $b + d$ может принимать значения от 9 до 15, получаем, что число $\overline{abcde}$ делится на 11 тогда и только тогда, когда $b + d = 15$, то есть когда b и d — это различные, расставленные в некотором (возможно, ином) порядке

цифры 7 и 8. Среди чисел указанного вида наибольшим числом на доске является 68574.

Ответ: : а) Да; б) нет; в) 68574.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4