Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
18 декабря 2019 года
Вариант МА1910211
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

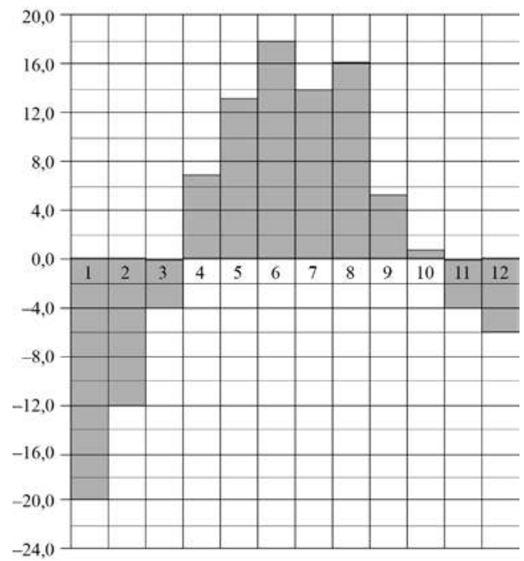
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Стоимость проездного билета на месяц составляет 720 рублей, а стоимость билета на одну поездку — 19 рублей. Аня купила проездной и сделала за месяц 46 поездок. На сколько рублей больше она бы потратила, если бы покупала билеты на одну поездку?

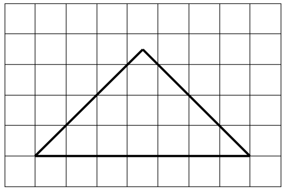
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной среднемесячной температурой в 1973 году.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите длину его медианы, проведённой к гипотенузе.



Ответ: ___________________________.

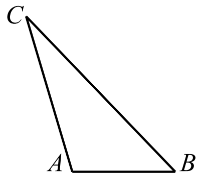
4 В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно два раза.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{4}{4-7x}}=0{,}4$.

Ответ: ___________________________.

6 Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 16 и 12, а угол между ними равен $30°$.

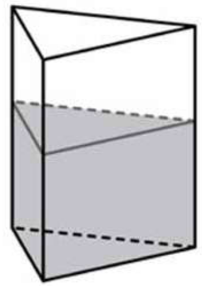


Ответ: ___________________________.

7 Прямая $y=3x-2$ является касательной к графику функции $y=x^3-5x^2+6x+7$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ___________________________.

8 В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 27 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд такой же формы, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(2^{\frac{3}{5}}\cdot7^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{14^9}$.

Ответ: ___________________________.

10 Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0=190$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v)=\dfrac{f_0}{1-\dfrac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью v приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c=320$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Ответ: ___________________________.

11 В среду акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в четверг подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 64 % дешевле, чем при открытии торгов в среду. На сколько процентов подорожали акции компании в среду?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+9)^8-8x+5$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $4\cos^4 x+9\cos 2x-1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через диагональ BD_1 проведена плоскость α, параллельная прямой AC.
а) Докажите, что прямая пересечения плоскости α с плоскостью основания $A_1B_1C_1D_1$ параллельна прямой A_1C_1.
б) Найдите угол между проведённой плоскостью и плоскостью основания параллелепипеда, если $AB=6$, $BC=8$, $CC_1=10$.

15 Решите неравенство $\dfrac{(5x-3)^2}{x-2}\ge\dfrac{9-30x+25x^2}{14-9x+x^2}$.

16 В треугольник ABC вписана окружность радиуса 4, касающаяся стороны AC в точке M, причём $AM=8$ и $CM=12$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

17 Строительство нового завода стоит 132 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2+5x+17$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-\left(0{,}5x^2+5x+17\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 4 года?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система
$$\begin{cases}x^2+4(a+1)x+3a^2+4a<0,\\ x^2+a^2=16\end{cases}$$
имеет решения.

19 Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.
а) Существуют ли десять последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть два очень счастливых?
б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2015?
в) Найдите наименьшее натуральное число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 1910209-1910212 (профильный уровень) от 18.12.2019

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1910209	10	28	3	0,32	13,5	16	- 4	146	3	100	45	- 9
1910210	4	26	4	0,28	14,5	12	1	126	4	70	63	16
1910211	154	5	3,5	0,375	- 3	48	3	3	7	16	80	- 8
1910212	276	7	2,5	0,0625	- 43	200	1	5	49	7	70	- 13

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $4\cos^4 x + 9\cos 2x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

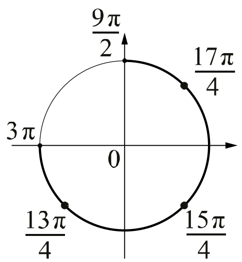
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$4\cos^4 x + 9\cos 2x - 1 = 0;$$
$$4\cos^4 x + 18\cos^2 x - 10 = 0;$$
$$2\cos^4 x + 9\cos^2 x - 5 = 0;$$
$$\left(\cos^2 x + 5\right)\left(2\cos^2 x - 1\right) = 0.$$

Отсюда следует, что $\cos^2 x = \frac{1}{2}$. Значит, $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ или $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.



Получим числа $\frac{13\pi}{4}$, $\frac{15\pi}{4}$ и $\frac{17\pi}{4}$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, k, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{4}$, $\frac{15\pi}{4}$ и $\frac{17\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

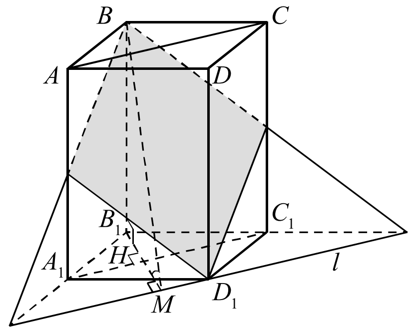
14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через диагональ BD_1 проведена плоскость α, параллельная прямой AC.

а) Докажите, что прямая пересечения плоскости α с плоскостью основания $A_1B_1C_1D_1$ параллельна прямой A_1C_1.

б) Найдите угол между проведённой плоскостью и плоскостью основания параллелепипеда, если $AB = 6$, $BC = 8$, $CC_1 = 10$.

Решение.

а) Прямая A_1C_1 параллельна прямой AC. Плоскость $A_1B_1C_1D_1$ проходит через прямую A_1C_1, параллельную секущей плоскости, и имеет с секущей плоскостью общую точку D_1, значит, прямая l пересечения секущей плоскости α с плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ параллельна прямой A_1C_1.



б) Пусть B_1M — перпендикуляр, опущенный из вершины B_1 на прямую l. Тогда B_1M — ортогональная проекция наклонной BM на плоскость $A_1B_1C_1D_1$. По теореме о трёх перпендикулярах прямые BM и l перпендикулярны, поэтому угол BMB_1 — линейный угол двугранного угла, образованного секущей плоскостью α и плоскостью $A_1B_1C_1D_1$.

Отрезок B_1M вдвое больше высоты B_1H прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$, проведённой из вершины прямого угла, поэтому

$$B_1M = 2B_1H = 2 \cdot \frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1}{A_1C_1} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 8}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{48}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника BMB_1 находим, что

$$\operatorname{tg} \angle BMB_1 = \frac{BB_1}{B_1M} = \frac{10 \cdot 5}{48} = \frac{25}{24}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{25}{24}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\dfrac{(5x-3)^2}{x-2} \geq \dfrac{9-30x+25x^2}{14-9x+x^2}$.

Решение.
Преобразуем неравенство:

$$\frac{(5x-3)^2}{x-2} \geq \frac{9-30x+25x^2}{14-9x+x^2};\quad \frac{(5x-3)^2}{x-2}-\frac{(5x-3)^2}{(x-2)(x-7)} \geq 0;$$

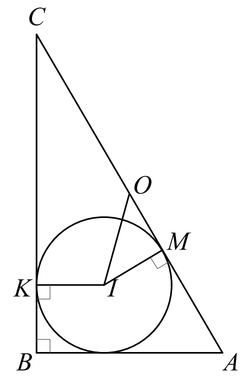
$$\frac{(5x-3)^2(x-8)}{(x-2)(x-7)} \geq 0;\quad \left[\begin{array}{l} x=0{,}6; \\ 2<x<7; \\ x\geq 8. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0{,}6\}$; $(2;7)$; $[8;+\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольник ABC вписана окружность радиуса 4, касающаяся стороны AC в точке M, причём $AM=8$ и $CM=12$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

Решение.
а) Пусть вписанная окружность касается стороны BC в точке K. Обозначим $BK=x$. Пусть S — площадь треугольника, p — полупериметр.



Тогда $p=8+12+x=20+x$,
$S=pR=4(20+x)=80+4x$.
С другой стороны, по формуле Герона

$$S=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}=\sqrt{(20+x)\cdot 8\cdot 12\cdot x}=$$
$$=4\sqrt{6x(20+x)}.$$

Из уравнения $4(20+x)=4\sqrt{6x(20+x)}$ получаем, что $x=4$. Стороны треугольника ABC равны 20, 16 и 12, следовательно, этот треугольник прямоугольный с прямым углом при вершине B.
б) Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно. Точка O — середина гипотенузы $AC=20$, и $OM=AO-AM=10-8=2$.
Тогда $IO=\sqrt{OM^2+MI^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.
Ответ: б) $2\sqrt{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Строительство нового завода стоит 132 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2+5x+17$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-\left(0{,}5x^2+5x+17\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 4 года?

Решение.

Прибыль фирмы (в млн рублей) за один год выражается как

$$px-\left(0{,}5x^2+5x+17\right)=-0{,}5x^2+(p-5)x-17.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x=p-5$. Наибольшее значение равно $\frac{(p-5)^2}{2}-17$. Строительство завода окупится не более чем за 4 года, если

$$\frac{(p-5)^2}{2}-17\ge\frac{132}{4};\ (p-5)^2\ge100;\ (p-15)(p+5)\ge0,$$

то есть при $p\ge15$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, $p=15$ — наименьшее подходящее значение.

Ответ: 15.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

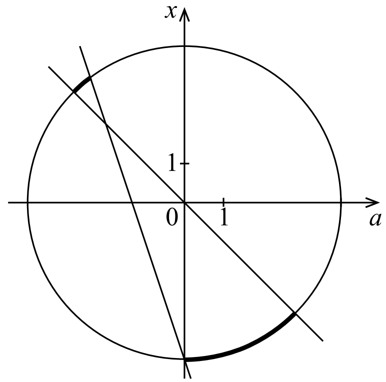
18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}x^2+4(a+1)x+3a^2+4a<0,\\ x^2+a^2=16\end{cases}$$

имеет решения.

Решение.

Разложим левую часть неравенства на множители: $(x+3a+4)(x+a)<0$. Поэтому неравенство задаёт пару вертикальных углов в плоскости Oax. Уравнение $x^2+a^2=16$ задаёт окружность с центром $(0;0)$ радиуса 4 в этой же плоскости. Решения системы — точки дуг окружности, лежащие в указанных вертикальных углах.



Абсциссы концов этих дуг находим из систем

$$\begin{cases}x+3a+4=0,\\ x^2+a^2=16\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}x+a=0,\\ x^2+a^2=16.\end{cases}$$

Из первой системы получаем: $a=-2{,}4$, $a=0$. Из второй системы получаем: $a=-2\sqrt{2}$, $a=2\sqrt{2}$.

Ответ: $-2\sqrt{2}<a<-2{,}4$, $0<a<2\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, однако, содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу	3
Получена верная геометрическая интерпретация, числовые значения границ промежутков значений параметров не найдены	2
Геометрическая интерпретация неполная. Ответ имеется для неполной геометрической конфигурации	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а) Существуют ли десять последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть два очень счастливых?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2015?

в) Найдите наименьшее натуральное число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

<u>Решение.</u>

а) Примером таких чисел являются 3012, 3013, …, 3021. Первое и последнее из них являются очень счастливыми.

б) Предположим, что это возможно. Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись меньшего из этих двух очень счастливых чисел, а $\overline{klmn}$ — десятичная запись большего из них. Из условия следует, что либо $10c+d+15=10m+n$, либо $10c+d+15=100+10m+n$. Отсюда получаем, что либо $(m+n)-(c+d)=9(c-m+1)+6$, либо $(m+n)-(c+d)=9(c-m-10)+5$. Значит, число $(m+n)-(c+d)$ даёт при делении на 9 или остаток 6, или остаток 5.

Также из условия следует, что либо $1000a+100b+2000=1000k+100l$, либо $1000a+100b+2100=1000k+100l$. Отсюда получаем, что либо $(k+l)-(a+b)=9(a-k+2)+2$, либо $(k+l)-(a+b)=9(a-k+2)+3$. Значит, число $(k+l)-(a+b)$ даёт при делении на 9 или остаток 2, или остаток 3.

Приходим к противоречию, так как по условию $(k+l)-(a+b)=(m+n)-(c+d)$.

в) Покажем, что искомое число равно 11. Для этого сначала приведём примеры очень счастливых четырёхзначных чисел, кратных 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10: число 2680 кратно 1, 2, 4, 5, 8 и 10; число 1890 кратно 3, 6, 7 и 9.

Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись какого-либо очень счастливого числа, кратного 11. Тогда

$$\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d=11(91a+9b+c)+(b-a+d-c).$$

Получаем, что число $b-a+d-c$ кратно 11. Поскольку a, b, c и d — цифры, отсюда следует, что либо $b-a+d-c=0$, либо $b-a+d-c=11$, либо $b-a+d-c=-11$.

В первом случае имеем $a+b=c+d$ и $a+c=b+d$. Вычитая эти равенства, получаем $b-c=c-b$, т. е. $b=c$, — противоречие. Во втором случае имеем $a+b=c+d$ и $a+c+11=b+d$. Вычитая эти равенства, получаем $b-c-11=c-b$, т. е. $2(b-c)=11$, — тоже противоречие, так как 11

не кратно 2. Аналогичное противоречие получается и в третьем случае. Значит, не существует очень счастливых четырёхзначных чисел, кратных 11.

Ответ: а) Да, например, 3012, 3013, …, 3021; б) нет; в) 11.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4