Тренировочная работа №1 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
28 сентября 2022 года
Вариант МА2210112
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

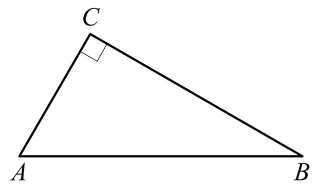
Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

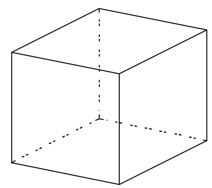
Ответом к каждому из заданий 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 20$, $\cos A = 0{,}4$. Найдите AC.



Ответ: ___________________________.

2 Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в двенадцать раз?



Ответ: ___________________________.

3 Фабрика выпускает сумки. В среднем 20 сумок из 200 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без скрытых дефектов.

Ответ: ___________________________.

4 Биатлонист 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 2 раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

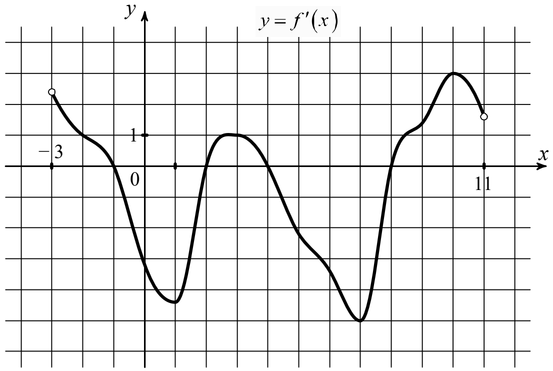
5 Решите уравнение $\sqrt{-36-13x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: ___________________________.

6 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(5a^{2}\right)^{3}\cdot(7b)^{2}}{\left(35a^{3}b\right)^{2}}$.

Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;11)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-2x-3$ или совпадает с ней.



Ответ: ___________________________.

8 Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности Tr публикаций, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель — целое число от 1 до 5.
Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — вдвое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R=\frac{2In+Op+3Tr+Q}{A}.$$

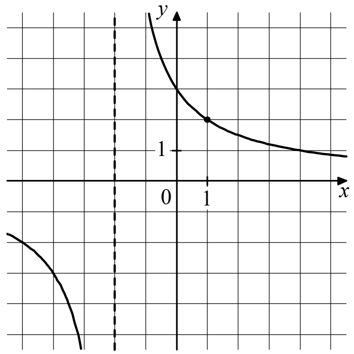
Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

Ответ: ___________________________.

9 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 18 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 2 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 38 часов. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Ответ: ___________________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x)=\dfrac{k}{x+a}$. Найдите значение $f(13)$.



Ответ: ___________________________.

11 Найдите точку максимума функции $y=x^{3}+6x^{2}+11$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

13 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 7. На ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 5$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 3 : 2$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол между плоскостями α и BB_1C_1.

14 Решите неравенство $2 \cdot \frac{8^x - 1}{2^x - 1} + \frac{15}{4^x + 2^x + 1} \le 13$.

15 15 января планируется взять кредит в банке на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 54 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

16 Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N.

а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 8$ и $AM : MC = 1 : 15$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(|x+3| + |x-a|\right)^2 - 6\left(|x+3| + |x-a|\right) + 5a(6-5a) = 0$$

имеет ровно два решения.

18 На сайте проводится опрос, кого из 164 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 14 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 36. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться на 160 или больше?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2210109-2210112 (профильный уровень) от 28.09.2022

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2210109	3,6	5	0,002	0,08	66	2,75	1	0,43	16	38	4
2210110	17,5	9	0,005	0,04	69	4,5	- 4	0,76	26	- 19	20
2210111	6	2744	0,89	0,07	- 8	7	2	8	896	- 0,2	- 18
2210112	8	1728	0,9	0,06	- 4	5	4	7	640	0,4	- 4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

12 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

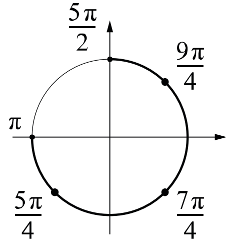
Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = 0,5; \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим числа $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; б) $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$.

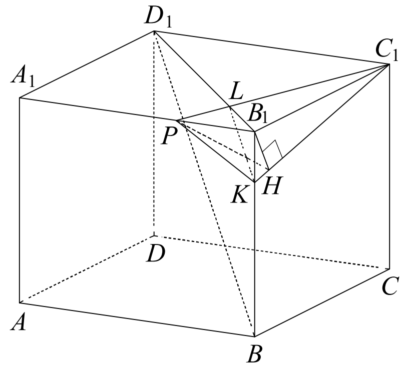
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а.* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

13 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 7. На ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 5$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 3:2$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол между плоскостями α и BB_1C_1.

Решение.



а) В плоскости BDD_1 через точку K проведём прямую, параллельную BD_1, и пересекающую B_1D_1 в точке L. Прямая C_1L пересекает ребро A_1B_1 в точке P. Плоскость KC_1P проходит через прямую KL, параллельную B_1D_1, поэтому плоскость KC_1P параллельна прямой B_1D_1 по признаку параллельности прямой и плоскости. Значит треугольник KC_1P — сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α.

Так как прямые B_1D_1 и KL параллельны, то $B_1L : LD_1 = B_1K : KB = 2:5$.

Треугольники B_1LP и D_1LC_1 подобны, поэтому $B_1P : D_1C_1 = B_1L : D_1L = 2:5$.

Значит, $A_1P : PB_1 = 3:2$.

б) Из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1H на прямую C_1K. По теореме о трёх перпендикулярах прямые PH и C_1K перпендикулярны. Значит, угол B_1HP искомый. Поскольку $A_1P : PB_1 = 3:2$, получаем $PB_1 = \frac{14}{5}$.

В прямоугольном треугольнике B_1C_1K имеем

$$B_1H = \frac{B_1C_1 \cdot B_1K}{C_1K} = \frac{14}{\sqrt{53}}.$$

Значит, $\operatorname{tg}\angle B_1HP = \frac{PB_1}{B_1H} = \frac{\sqrt{53}}{5}$, $\angle B_1HP = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{53}}{5}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{53}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б.* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14

Решите неравенство $2\cdot\frac{8^x-1}{2^x-1}+\frac{15}{4^x+2^x+1}\le 13$.

Решение.

Преобразуем неравенство

$$2\cdot\frac{2^{3x}-1}{2^x-1}+\frac{15}{4^x+2^x+1}-13\le 0;\quad 2\cdot\frac{\left(2^x-1\right)\left(4^x+2^x+1\right)}{2^x-1}+\frac{15}{4^x+2^x+1}-13\le 0.$$

При $x\ne 0$

$$2\cdot\left(4^x+2^x+1\right)+\frac{15}{4^x+2^x+1}-13\le 0.$$

Пусть $y=4^x+2^x+1$, $y>0$. Тогда

$$2y+\frac{15}{y}-13\le 0;\quad \frac{2y^2-13y+15}{y}\le 0;\quad \frac{3}{2}\le y\le 5.$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases}\frac{3}{2}\le 4^x+2^x+1\le 5,\\ x\ne 0;\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{l}\log_2\frac{\sqrt{3}-1}{2}\le x<0\\ 0<x\le\log_2\frac{\sqrt{17}-1}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\log_2\frac{\sqrt{3}-1}{2};0\right)\cup\left(0;\log_2\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15

15 января планируется взять кредит в банке на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 54 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{16S}{17},\ \ldots,\ \frac{2S}{17},\ \frac{S}{17},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на r%. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$kS,\ \frac{16kS}{17},\ \ldots,\ \frac{2kS}{17},\ \frac{kS}{17}.$$

Значит, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{17},\ \frac{16(k-1)S+S}{17},\ \ldots,\ \frac{2(k-1)S+S}{17},\ \frac{(k-1)S+S}{17}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{16}{17}+\ldots+\frac{2}{17}+\frac{1}{17}\right)=S\left(1+9(k-1)\right).$$

Общая сумма выплат на 54 % больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$9(k-1)=0{,}54;\quad k=1{,}06;\quad r=6.$$

Ответ: 6 %.

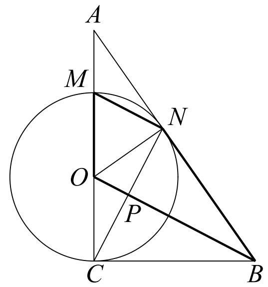
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N.

а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 8$ и $AM : MC = 1 : 15$.

Решение.



а) Поскольку прямые AC и BC перпендикулярны, прямая BC — касательная к окружности. Прямая BO перпендикулярна прямой CN. Точка N лежит на окружности с диаметром CM, поэтому $\angle CNM = 90°$. Прямые BO и MN перпендикулярны одной и той же прямой CN, следовательно, они параллельны.

б) Пусть

$$AM = x,\ MC = 15x.$$

Тогда

$$OC = OM = 7{,}5x,\ OA = 8{,}5x,\ AC = 16x.$$

По свойству секущей и касательной, проведённых из одной точки, $AN^2 = AM \cdot AC$, следовательно, $AN = 4x$.

Поскольку прямые MN и BO параллельны, по теореме Фалеса получаем $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MO} = \frac{2}{15}$, следовательно, $NB = 30x$. Отрезки BC и BN равны как отрезки касательных, проведённых из одной точки, значит, $BC = 30x$.

Поскольку $\angle CMN = \angle COB$, прямоугольные треугольники CNM и BCO подобны, следовательно,

$$MN = \frac{CN \cdot CO}{BC} = \frac{8 \cdot 7{,}5x}{30x} = 2.$$

Из подобия треугольников AMN и AOB следует, что

$$BO = \frac{MN \cdot AO}{AM} = \frac{2 \cdot 8{,}5x}{x} = 17.$$

Пусть отрезки BO и CN пересекаются в точке P. Тогда P — середина CN

и $NP = \frac{1}{2}NC = 4$.

По формуле площади трапеции

$$S_{BOMN} = \frac{BO + MN}{2} \cdot NP = \frac{17 + 2}{2} \cdot 4 = 38.$$

Ответ: б) 38.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(|x+3| + |x-a|\right)^2 - 6\left(|x+3| + |x-a|\right) + 5a\left(6-5a\right) = 0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Пусть $t = |x+3| + |x-a|$, тогда уравнение запишется в виде $t^2 - 6t + 5a\left(6-5a\right) = 0$. Решения этого уравнения имеют вид $t = 5a$ или $t = 6 - 5a$. Значит, решения исходного уравнения — это решения уравнений $|x+3| + |x-a| = 5a$ или $|x+3| + |x-a| = 6 - 5a$.

Исследуем, сколько решений имеет уравнение $|x+3| + |x-a| = b$ в зависимости от a и b. Рассмотрим функцию $f(x) = |x+3| + |x-a|$. При $a \neq -3$ графиком этой функции является ломаная, состоящая из трёх звеньев, угловые коэффициенты которых равны -2, 0 и 2. Минимальное значение достигается на отрезке с концами -3 и a и равно $|a+3|$. Таким образом, уравнение $|x+3| + |x-a| = b$ имеет два решения при $b > |a+3|$, бесконечно много решений при $b=|a+3|$ и не имеет решений при $b<|a+3|$. В случае $a=-3$ уравнение $2|x+3|=b$ имеет два решения при $b>0$, одно решение при $b=0$ и не имеет решений при $b<0$.

Уравнения $|x+3|+|x-a|=5a$ и $|x+3|+|x-a|=6-5a$ могут иметь общие решения при $5a=6-5a$, то есть при $a=\frac{3}{5}$. При $a=\frac{3}{5}$ оба уравнения принимают вид $|x+3|+\left|x-\frac{3}{5}\right|=3$ и не имеют решений.

При других значениях a исходное уравнение имеет ровно два решения, если одно из уравнений $|x+3|+|x-a|=5a$ и $|x+3|+|x-a|=6-5a$ не имеет решений, а другое имеет два решения. Эти условия равносильны неравенству $(5a-|a+3|)(6-5a-|a+3|)<0$. При $a\le-3$ неравенство принимает вид $(6a+3)(9-4a)<0$ и выполняется при любом $a\le-3$. При $a>-3$ неравенство принимает вид $(4a-3)(3-6a)<0$, откуда с учётом условия $a>-3$ получаем $-3<a<\frac{1}{2}$; $a>\frac{3}{4}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при $a<\frac{1}{2}$ и $a>\frac{3}{4}$.

Ответ: $a<\frac{1}{2}$; $a>\frac{3}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=0,5$ и/или $a=0,75$	3
В решении верно найдены граничные точки множества значений a ($a=0,5$, $a=0,75$), но неверно определены промежутки значений a. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно найдена хотя бы одна из граничных точек множества значений a: $a=0,5$ или $a=0,75$. ИЛИ Получено хотя бы одно из уравнений $|x+3|+|x-a|=5a$ или $|x+3|+|x-a|=6-5a$	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 На сайте проводится опрос, кого из 164 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 14 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 36. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться на 160 или больше?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

Решение.

а) Если рейтинг футболиста на сайте равен 36, то доля голосов, отданных за него, находится в границах от 0,355 до 0,365. Поскольку всего проголосовало 14 посетителей сайта, получаем, что количество голосов, отданных за этого футболиста, не меньше $14\cdot0,355=4,97$, но меньше $14\cdot0,365=5,11$, то есть равно 5. После того как Вася проголосовал, доля голосов за первого футболиста стала равна $\frac{5}{15}=0,333\ldots$ Значит, его рейтинг стал равен 33.

б) Пусть за 163 футболистов было отдано по одному голосу, а за оставшегося — 37, всего 200 голосов. В этом случае 163 футболиста имеют рейтинг 1, а последний — 19; сумма рейтингов равна 182. Если Вася отдаст свой голос за последнего футболиста, то его рейтинг останется равным 19, а рейтинги всех остальных футболистов станут равны 0. В этом случае сумма рейтингов станет равна 19, то есть уменьшится на 163.

в) Заметим, что для каждого из 164 футболистов доля отданных за него голосов, выраженная в процентах, отличается от рейтинга не более чем на 0,5. Поэтому сумма рейтингов всех футболистов отличается от 100 не более чем на $0,5\cdot164=82$. В частности, эта сумма не может превосходить 182.

Пример, приведённый в предыдущем пункте, показывает, что сумма рейтингов может равняться 182. Значит, наибольшее значение суммы рейтингов всех футболистов — это 182.

Ответ: а) 33; б) да; в) 182.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пункты *а* и *б*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*