Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
13 декабря 2022 года
Вариант МА2210212
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

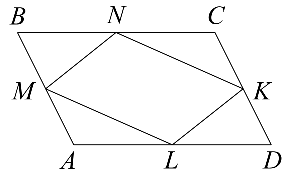
Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Часть 1

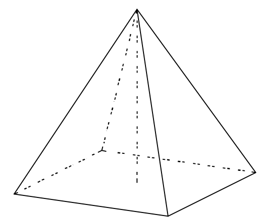
Ответом к каждому из заданий 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 68. Найдите площадь параллелограмма $MNKL$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.



Ответ: ___________________________.

2 В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 3, боковое ребро равно 9. Найдите её объём.



Ответ: ___________________________.

3 На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран, в том числе группы из Канады, Англии и Вьетнама. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Канады будет выступать позже групп из Англии и Вьетнама? Ответ округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

4 Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 5. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

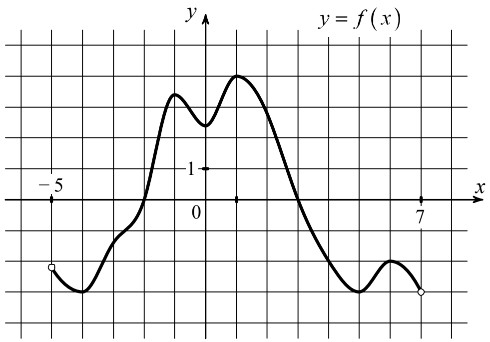
5 Решите уравнение $\sqrt{21+4x}=x$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: ____________________________.

6 Найдите значение выражения $\dfrac{\cos(-\pi-\beta)-3\sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}+\beta\right)}{\cos(\beta-2\pi)}$.

Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-5;7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна прямой $y=14$.



Ответ: ____________________________.

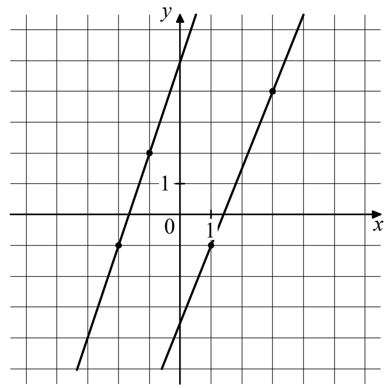
8 Автомобиль, масса которого равна $m=1700$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остается неизменным, и проходит за это время путь $S=1000$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F=\dfrac{2mS}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдёт указанный путь, если известно, что сила F, приложенная к автомобилю, не меньше 2125 Н. Ответ дайте в секундах.

Ответ: ____________________________.

9 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 1 час 30 минут, второй и третий — за 1 час 50 минут, а первый и третий — за 2 часа 12 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Ответ: ____________________________.

10 На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



Ответ: ____________________________.

11 Найдите наибольшее значение функции $y=11\ln(x+4)-11x-5$ на отрезке $[-3,5;0]$.

Ответ: ____________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $21^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot 7^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

13 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 2\sqrt{14}$, $SB = 6\sqrt{2}$, $SD = \sqrt{65}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

14 Решите неравенство

$$\left(4x^3 + 13x^2 - 12x\right) \cdot \left(x+4\right)^{-1} - \left(8x^3 - 28x^2 + 30x - 38\right) \cdot \left(2x-5\right)^{-1} \geq -10.$$

15 15 января планируется взять кредит в банке на 13 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо оплатить часть долга одним платежом;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма платежей после полного погашения равнялась 2,7 млн рублей?

16 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны BC, если $B_1C_1 = 4\sqrt{15}$ и $\angle BAC = 30°$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2\sqrt{x^4 + (a-6)^4} = |x + a - 6| + |x - a + 6|$$

имеет единственное решение.

18 Сначала Маша написала на доске 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 50. Затем вместо некоторых из чисел (возможно, одного) она написала на доске числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, она с доски стёрла.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 29. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 29. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2210209-2210212 (профильный уровень) от 13.12.2022

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2210209	24	3	0,1	0,63	- 5	5	6	3	1	9	- 7
2210210	17	6	0,28	0,02	- 9	14,4	5	4	10	- 3,8	- 51
2210211	13	250	0,33	0,5	4	7	5	32	32	- 10,25	- 3
2210212	34	144	0,33	0,56	7	- 4	6	40	72	- 46	28

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

12 а) Решите уравнение $21^{\sin x}=3^{\sin x}\cdot 7^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

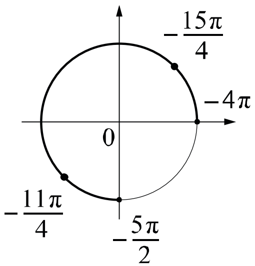
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\sin x}\cdot 7^{\sin x}=3^{\sin x}\cdot 7^{\cos x};\quad 7^{\sin x}=7^{\cos x};\quad \sin x=\cos x;\ \operatorname{tg}x=1,$$

откуда следует, что $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим числа $-\frac{15\pi}{4};\ -\frac{11\pi}{4}$.

Ответ**: а)** $\frac{\pi}{4}+\pi k$**,** $k\in Z$**; б)** $-\frac{15\pi}{4}$**;** $-\frac{11\pi}{4}$**.**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а.* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

13 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$ и $BC=3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=2\sqrt{14}$, $SB=6\sqrt{2}$, $SD=\sqrt{65}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

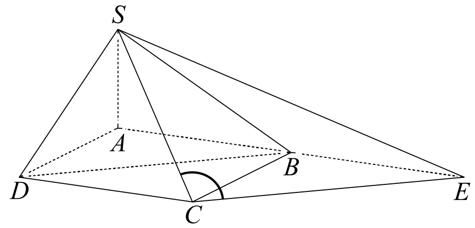
Решение.

а) В треугольнике SAB имеем

$$SB^2=72=56+16=SA^2+AB^2,$$

поэтому треугольник SAB прямоугольный с гипотенузой SB и прямым углом SAB. Аналогично в треугольнике SAD из равенства

$$SD^2=65=56+9=SA^2+AD^2$$



получаем, что $\angle SAD=90°$. Так как прямая SA перпендикулярна прямым AB и AD, прямая SA перпендикулярна плоскости ABD. Получили, что ребро SA — высота пирамиды $SABCD$.

б) На прямой AB отметим такую точку E, что $BDCE$ — параллелограмм, тогда $BE=DC=AB$ и $DB=CE$. Угол SCE искомый.

В прямоугольных треугольниках ABD, SAC и SAE

$$AC=BD=CE=\sqrt{AB^2+AD^2}=5;\ SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=9\ \text{ и }\ SE^2=SA^2+AE^2=120.$$

По теореме косинусов в треугольнике SCE:

$$SE^2=SC^2+CE^2-2SC\cdot CE\cdot\cos\angle SCE;\quad 120=81+25-90\cos\angle SCE;$$

$$\cos\angle SCE=-\frac{7}{45}.$$

Искомый угол равен $\arccos\frac{7}{45}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{7}{45}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б.* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство

$$\left(4x^3+13x^2-12x\right)\cdot\left(x+4\right)^{-1}-\left(8x^3-28x^2+30x-38\right)\cdot\left(2x-5\right)^{-1}\ge -10.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x\left(4x-3\right)\left(x+4\right)}{x+4}-\frac{8x^3-28x^2+30x-38}{2x-5}\ge -10.$$

При $x\ne -4$ получаем

$$\frac{8x^3-6x^2-20x^2+15x-8x^3+28x^2-30x+38+20x-50}{2x-5}\ge 0;$$

$$\frac{2x^2+5x-12}{2x-5}\ge 0;\quad \frac{\left(2x-3\right)\left(x+4\right)}{2x-5}\ge 0,$$

откуда $-4<x\le\frac{3}{2}$ или $x>\frac{5}{2}$.

Ответ: $\left(-4;1{,}5\right],\left(2{,}5;+\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1,5 ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 15 января планируется взять кредит в банке на 13 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо оплатить часть долга одним платежом;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма платежей после полного погашения равнялась 2,7 млн рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S млн рублей. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\ \frac{12S}{13};\ldots;\frac{2S}{13};\ \frac{S}{13};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 5 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}05S;\ 1{,}05\cdot\frac{12S}{13};\ldots;1{,}05\cdot\frac{2S}{13};\ 1{,}05\cdot\frac{S}{13}.$$

Следовательно, платежи должны быть следующими:

$$0{,}05S+\frac{S}{13};\ \frac{12\cdot 0{,}05S+S}{13};\ldots;\frac{2\cdot 0{,}05S+S}{13};\ \frac{0{,}05S+S}{13}.$$

Сумма всех платежей равна:

$$S+S\cdot 0{,}05\left(1+\frac{12}{13}+\ldots+\frac{2}{13}+\frac{1}{13}\right)=S\left(1+\frac{14\cdot 0{,}05}{2}\right)=1{,}35S.$$

Сумма всех платежей равна 4 млн рублей, следовательно, $1{,}35S=2{,}7$; $S=2$ млн рублей. Значит, сумма, взятая в кредит, равна 2 млн рублей.

Ответ: 2 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

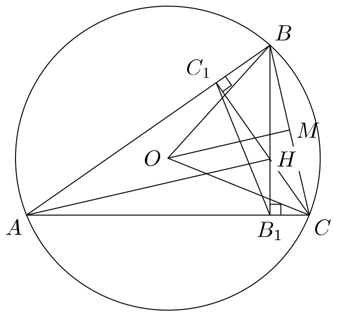
16 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны BC, если $B_1C_1 = 4\sqrt{15}$ и $\angle BAC = 30°$.

Решение.

а) В четырёхугольнике AC_1HB_1 углы C_1 и B_1 прямые, следовательно, около этого четырёхугольника можно описать окружность, причём AH — её диаметр. Вписанные углы HB_1C_1 и HAC_1 опираются на одну дугу, следовательно, они равны, а значит, $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.



б) В прямоугольном треугольнике BB_1A имеем

$$AB_1 = AB \cdot \cos\angle BAB_1 = AB \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}AB.$$

В прямоугольном треугольнике CC_1A имеем

$$AC_1 = AC \cdot \cos\angle CAC_1 = AC \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}AC.$$

Получаем, что $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$.

Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общий угол A и $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$, следовательно, они подобны. Тогда $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{AC_1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Значит,

$$BC = \frac{2B_1C_1}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{5}.$$

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, M — середина стороны BC. Тогда расстояние от точки O до стороны BC равно длине отрезка OM. Треугольник BOC равнобедренный, следовательно,

$$\angle COM = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC = 30°.$$

В прямоугольном треугольнике OMC имеем

$$OM = MC \cdot \operatorname{ctg}\angle MOC = \frac{BC}{2} \cdot \operatorname{ctg}30° = \frac{8\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{15}.$$

Ответ: б) $4\sqrt{15}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2\sqrt{x^4 + (a-6)^4} = |x + a - 6| + |x - a + 6|$$

имеет единственное решение.

Решение.

Заметим, что если число x_0 является решением уравнения, то и число $-x_0$ также является решением этого уравнения. Значит, если уравнение имеет единственное решение, то это решение $x = 0$.

При $x = 0$ уравнение принимает вид

$$2\sqrt{(a-6)^4} = 2|a-6|; \quad (a-6)^2 = |a-6|; \quad |a-6| \cdot (|a-6| - 1) = 0,$$

откуда $a = 5, a = 6, a = 7$.

При $a = 5$ и $a = 7$ исходное уравнение принимает вид $2\sqrt{x^4 + 1} = |x-1| + |x+1|$. При $x < -1$ правая часть уравнения $-2x < 2x^2 < 2\sqrt{x^4+1}$.

При $-1 \le x \le 1$ правая часть уравнения равна 2, а левая часть уравнения не меньше 2, причём равенство достигается только при $x = 0$.

При $x>1$ правая часть уравнения $2x<2x^2<2\sqrt{x^4+1}$. Значит, исходное уравнение имеет единственное решение $x=0$.

При $a=6$ исходное уравнение принимает вид $2\sqrt{x^4}=2|x|$. Числа -1, 0 и 1 являются корнями этого уравнения.
Таким образом, исходное уравнение имеет единственное решение при $a=5$ и $a=7$.
Ответ: $a=5; a=7$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба значения *a*, но решение недостаточно обосновано. ИЛИ Обоснованно получено одно из значений *a*, удовлетворяющее условию	3
Получены все значения *a*, при которых число 0 — решение уравнения	2
Установлено, что при выполнении условий задачи число 0 — решение уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

18 Сначала Маша написала на доске 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 50. Затем вместо некоторых из чисел (возможно, одного) она написала на доске числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, она с доски стёрла.
а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?
б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 29. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?
в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 29. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Решение.
а) Пусть первоначально на доске было 19 чисел, равных 10, и одно число, равное 1. Их среднее арифметическое равно $\frac{19\cdot 10+1}{20}=9{,}55$. Пусть число, равное 1, уменьшилось на 1 (после чего было стёрто с доски), а остальные числа не изменились. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{19\cdot 10}{19}=10$.
б) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма остальных чисел до уменьшения была равна S, а после уменьшения стала равна $S-n$, где n — количество чисел, которые были уменьшены на 1, но не были стёрты с доски. По условию $\frac{S+k}{20}=29$, то есть $S=580-k$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{S-n}{20-k}=34$, тогда получим $\frac{580-k-n}{20-k}=34$. Из этого равенства находим $33k=100+n$. Число n лежит в пределах от 0 до 20, поэтому $100+n$ лежит в пределах от 100 до 120. В этом промежутке нет целых чисел, делящихся на 33.
в) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма остальных чисел до уменьшения была равна S, а после уменьшения стала равна $S-n$. По условию $\frac{S+k}{20}=29$, то есть $S=580-k$. Необходимо найти наибольшее возможное значение числа $A=\frac{S-n}{20-k}$. Имеем

$$A=\frac{S-n}{20-k}=\frac{580-k-n}{20-k}\le\frac{580-k}{20-k}=1+\frac{560}{20-k}.$$

Число A будет наибольшим, если $n=0$ и число k будет принимать наибольшее возможное значение. Оценим это значение. Так как каждое из первоначально написанных на доске чисел было не более 50 и на доске осталось $20-k$ чисел, для суммы S выполняется неравенство

$$580-k=S\le 50(20-k),$$

откуда следует, что

$$580-k\le 50(20-k);\quad 49k\le 420;\quad k\le\frac{60}{7}<9;\quad k\le 8.$$

Значит,

$$A\le 1+\frac{560}{20-k}\le 1+\frac{560}{12}=47\frac{2}{3}.$$

Приведём пример, показывающий, что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно могло стать равным $47\frac{2}{3}$. Пусть первоначально на доске было написано 8 единиц, 11 чисел, равных 50, и одно число, равное 22. Тогда их среднее арифметическое было равно $\frac{8+11\cdot 50+22}{20}=29$.

Пусть 8 чисел, равных единице, уменьшились на 1 (после чего были стёрты с доски), а остальные числа не изменились. Тогда среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{11\cdot 50+22}{12}=47\frac{2}{3}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $47\frac{2}{3}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4