Тренировочная работа №3 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
28 февраля 2023 года
Вариант МА2210310
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

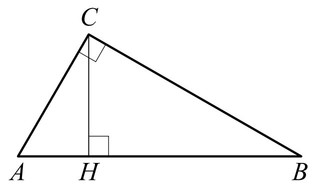
Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Часть 1

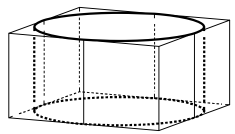
Ответом к каждому из заданий 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $BC = 12$, $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите длину отрезка AH.



Ответ: ___________________________.

2 Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 0,5. Объём параллелепипеда равен 1. Найдите высоту цилиндра.



Ответ: ___________________________.

3 В группе 21 человек, среди них — Иван и Елена. Группу случайным образом делят на 3 одинаковые по численности подгруппы. Найдите вероятность того, что Иван и Елена окажутся в одной подгруппе.

Ответ: ___________________________.

4 Агрофирма закупает куриные яйца только в двух домашних хозяйствах. Известно, что 5 % яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 30 % яиц высшей категории. В этой агрофирме 15 % яиц высшей категории. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Ответ: ___________________________.

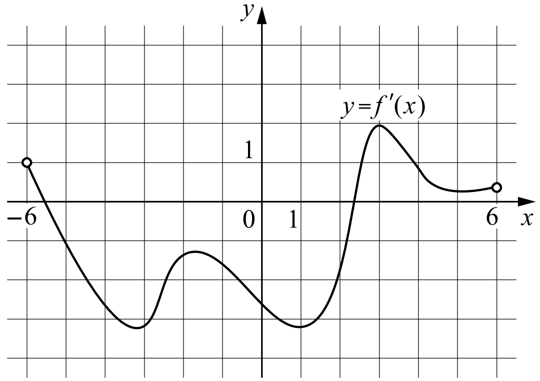
5 Решите уравнение $\frac{x-3}{6x-1} = \frac{x-3}{4x-7}$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: ___________________________.

6 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(3^{\frac{4}{7}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{15^{12}}$.

Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;6)$. В какой точке отрезка $[-5;-1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ____________________________.

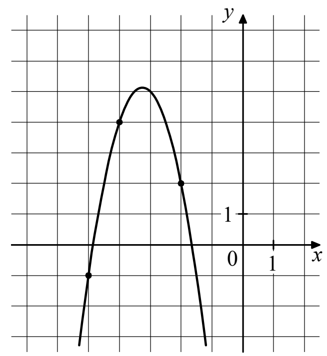
8 На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле $F_\text{А}=\rho g l^3$, где l — длина ребра куба в метрах, $\rho=1000$ кг/м^3 — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте, что $g=9{,}8$ Н/кг). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше чем 3 361 400 Н? Ответ дайте в метрах.

Ответ: ____________________________.

9 Пристани A и B расположены на озере, расстояние между ними равно 234 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из A в B. На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 4 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 8 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость баржи на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x)=ax^2+bx+c$. Найдите значение $f(1)$.



Ответ: ____________________________.

11 Найдите точку минимума функции $y=x^3-12x^2+11$.

Ответ: ____________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $4\cos^3 x = \sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -2\pi\right]$.

13 Основанием правильной пирамиды $PABCD$ является квадрат $ABCD$. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды, если $AB = 60$.

14 Решите неравенство $\dfrac{3\cdot 2^{2x} - 7\cdot 2^{x+1} + 11}{2^{x+2} - 4^{x+1}} \geq \dfrac{1}{2^{x+1}}$.

15 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 9 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 5 % в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

16 В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 24$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-3a+1)^2 + (y+2a)^2 = a-1,\\ 4x+3y = a+1\end{cases}$$

не имеет решений.

18 У Ани есть 700 рублей. Ей нужно купить конверты (большие и маленькие). Большой конверт стоит 28 рублей, а маленький — 22 рубля. При этом число маленьких конвертов не должно отличаться от числа больших конвертов больше чем на пять.

а) Может ли Аня купить 25 конвертов?

б) Может ли Аня купить 29 конвертов?

в) Какое наибольшее число конвертов может купить Аня?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2210309-2210312 (профильный уровень) от 28.02.2023

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2210309	24	0,2	0,2	0,5	1	7	- 1	6	10	- 50	18
2210310	7	1	0,3	0,6	3	25	- 5	7	9	- 31	8
2210311	16	52	0,125	0,5	5	- 34	2	0,8	32	- 0,2	- 5
2210312	44	60	0,12	0,25	7	10,5	1	0,4	24	- 0,4	- 4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

12 а) Решите уравнение $4\cos^3 x = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -2\pi\right]$.

Решение.

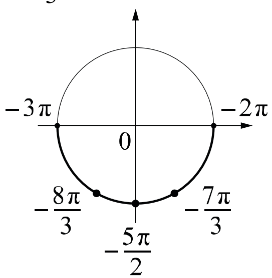
а) Запишем уравнение в виде

$$4\cos^3 x - \cos x = 0; \quad \cos x \cdot \left(4\cos^2 x - 1\right) = 0.$$

Значит, или $\cos x = 0$, откуда следует, что $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, или $\cos^2 x = \frac{1}{4}$, $\cos x = \pm\frac{1}{2}$, откуда следует, что $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$, или $x = \frac{2\pi}{3} + \pi m$, $m \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -2\pi\right]$.

Получим числа $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; $\frac{2\pi}{3} + \pi m$, $m \in Z$; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

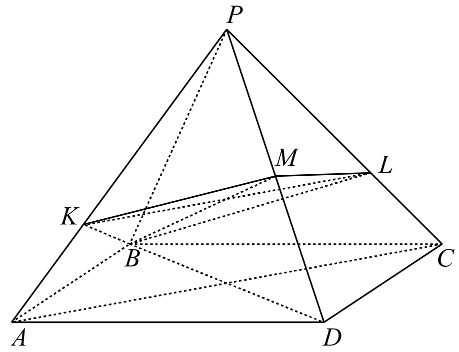
13 Основанием правильной пирамиды $PABCD$ является квадрат $ABCD$. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды, если $AB = 60$.

Решение.

а) Пусть точка M — середина ребра PD. Так как прямая BM лежит в плоскости сечения, перпендикулярного PD, отрезки BM и PD перпендикулярны, то есть в треугольнике BPD медиана BM является высотой. Значит, $BP = BD$, но, так как $PB = PD$, треугольник BPD равносторонний, а поэтому $\angle PBD = 60°$, что и требовалось доказать.



б) Из доказанного следует, что $PA = AB\sqrt{2} = 60\sqrt{2}$ и $BM = 30\sqrt{6}$ как высота равностороннего треугольника BPD.

По теореме косинусов в треугольнике APD получаем:

$AD^2 = AP^2 + PD^2 - 2AP \cdot PD \cdot \cos\angle APD$, следовательно, $\cos\angle APD = \frac{3}{4}$.

Пусть четырёхугольник $BKML$ — указанное сечение (точка K лежит на ребре PA, а точка L — на ребре PC). Так как отрезки KM и PD перпендикулярны, $PK = \frac{PM}{\cos\angle APD} = 40\sqrt{2}$. Аналогично $PL = 40\sqrt{2}$. Значит, $PK = PL$, а потому треугольник PKL подобен треугольнику PAC. Поэтому $LK = 40\sqrt{2}$. Кроме того, прямые KL и AC параллельны, а прямые AC и BM перпендикулярны, так как AC перпендикулярна плоскости BPD, а прямая BM лежит в этой плоскости. Значит, прямые KL и BM перпендикулярны. Поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}BM \cdot KL = \frac{1}{2} \cdot 30\sqrt{6} \cdot 40\sqrt{2} = 1200\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $1200\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\dfrac{3\cdot 2^{2x}-7\cdot 2^{x+1}+11}{2^{x+2}-4^{x+1}}\ge\dfrac{1}{2^{x+1}}$.

Решение.
Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{3\cdot 2^{2x}-14\cdot 2^{x}+11}{2^{x+2}\left(1-2^{x}\right)}\ge\frac{1}{2^{x+1}};$$

$$\frac{\left(3\cdot 2^{x}-11\right)\left(2^{x}-1\right)}{2^{x+2}\left(1-2^{x}\right)}\ge\frac{2}{2^{x+2}};$$

$$\begin{cases}3\cdot 2^{x}-11\le -2,\\ x\ne 0;\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}x<0\\ 0<x\le\log_2 3.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;0)$; $(0;\ \log_2 3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\log_2 3$. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 9 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 5 % в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.
Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 9 %, т. е. увеличивается в 1,09 раза. Поэтому через два года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1{,}09^2 S=1{,}1881S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1{,}05\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)S,$$

где n — некоторое натуральное число процентов.
По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1{,}05\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)S>1{,}1881S,$$

$$1+\frac{n}{100}>\frac{11881}{10500}=1{,}131...$$

При $n=14$ неравенство

$$1{,}14>1{,}131...$$

верно, а при $n=13$ неравенство

$$1{,}13>1{,}131...$$

неверно, как и при всех меньших n.
Ответ: 14.

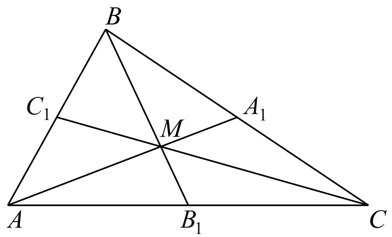
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 24$.

Решение.

а) Медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$



Следовательно, треугольники AB_1B и CB_1B равнобедренные, причём $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$. Сумма всех этих четырёх углов равна $180°$. Тогда $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90°$.
Значит, треугольник ABC прямоугольный.
б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Треугольник C_1BC также прямоугольный. Поэтому

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

Сложим полученные равенства:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}\left(AB^2 + BC^2\right) = \frac{5}{4}AC^2 = 720.$$

Ответ: б) 720.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-3a+1)^2+(y+2a)^2=a-1,\\ 4x+3y=a+1\end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

При $a<1$ система не имеет решений.
При $a=1$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2=0,\\ 4x+3y=2.\end{cases}$$

Первому уравнению удовлетворяет только пара $(2;-2)$, которая также удовлетворяет второму уравнению, поэтому при $a=1$ система имеет единственное решение.
При $a>1$ первое уравнение задаёт окружность с центром в точке $(3a-1;-2a)$, радиус которой равен $\sqrt{a-1}$. Второе уравнение задаёт прямую $4x+3y=a+1$. Следовательно, система не имеет решений тогда и только тогда, когда расстояние от центра $(3a-1;-2a)$ окружности до прямой $4x+3y=a+1$ больше радиуса $\sqrt{a-1}$ окружности. Получаем

$$\begin{cases}\dfrac{\left|4(3a-1)+3(-2a)-a-1\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}>\sqrt{a-1},\\ a>1;\end{cases}\quad \begin{cases}|5a-5|>5\sqrt{a-1},\\ a>1;\end{cases}\quad a>2.$$

Следовательно, система не имеет решений при $a\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a = 2$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a: $(-\infty; 1)$ или $(2; +\infty)$, возможно, с включением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружности (аналитически или графически). ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

18 У Ани есть 700 рублей. Ей нужно купить конверты (большие и маленькие). Большой конверт стоит 28 рублей, а маленький — 22 рубля. При этом число маленьких конвертов не должно отличаться от числа больших конвертов больше чем на пять.

а) Может ли Аня купить 25 конвертов?

б) Может ли Аня купить 29 конвертов?

в) Какое наибольшее число конвертов может купить Аня?

Решение.

а) Аня может купить, например, 10 больших и 15 маленьких конвертов:

$$10 \cdot 28 + 15 \cdot 22 = 610 \text{ (руб.)}.$$

б) Дешевле всего 29 конвертов будут стоить, если купить наибольшее возможное число маленьких конвертов и наименьшее возможное число больших, то есть если купить 12 больших и 17 маленьких, поскольку если больших меньше 12, то маленьких больше 17, и в этом случае разность между числом больших и маленьких больше чем 5. Но тогда стоимость покупки составляет

$$12 \cdot 28 + 17 \cdot 22 = 710 \text{ (руб.)},$$

что больше, чем имеющиеся 700 рублей.

в) Пусть n и m — число маленьких и больших конвертов соответственно. Тогда

$$\begin{cases} 28m + 22n \le 700, \\ |m - n| \le 5, \\ m, n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Положим $s = n + m$, тогда

$$\begin{cases} 6m + 22s \le 700, \\ -5 \le 2m - s \le 5, \\ m = 0, 1, \ldots, s; \end{cases} \quad \begin{cases} m \le \dfrac{350 - 11s}{3}, \\ \dfrac{s-5}{2} \le m \le \dfrac{s+5}{2}, \\ m = 0, 1, \ldots, s. \end{cases}$$

Следовательно, $\dfrac{s-5}{2} \le \dfrac{350 - 11s}{3}$, а значит, $s \le \dfrac{715}{25} = 28\dfrac{3}{5}$.

Аня может купить не больше 28 конвертов.

Покажем, что Аня может купить 28 конвертов.

При $m = 12$, $n = 16$ получаем $12 \cdot 28 + 16 \cdot 22 = 688 < 700$.

Значит, Аня может купить 28 конвертов.

Ответ: а) да; б) нет; в) 28.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*