Тренировочная работа №3 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
28 февраля 2023 года
Вариант МА2210311
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

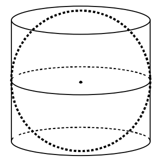
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 12, а отношение соседних сторон равно 1:3.

Ответ: ___________________________.

2 Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 78. Найдите площадь поверхности шара.



Ответ: ___________________________.

3 В магазине в среднем из 120 сумок 15 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что выбранная в магазине сумка окажется со скрытыми дефектами.

Ответ: ___________________________.

4 Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 11 очков. Найдите вероятность того, что во второй раз выпало 5 очков.

Ответ: ___________________________.

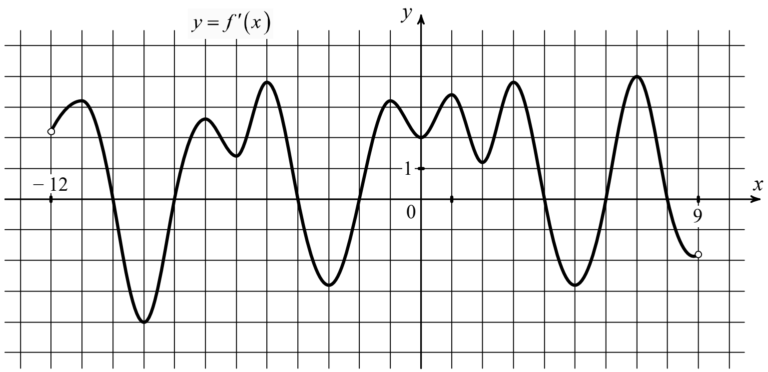
5 Решите уравнение $\sqrt{6x-5}=x$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: ___________________________.

6 Найдите $98\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{7}$.

Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-9; 7]$.



Ответ: ____________________________.

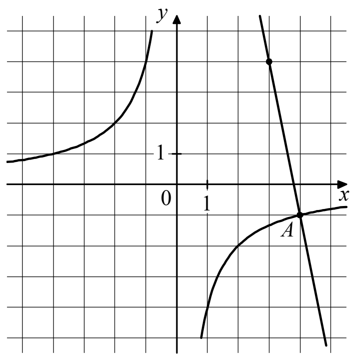
8 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}6 + 12t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 8 метров?

Ответ: ____________________________.

9 Игорь и Паша, работая вместе, могут покрасить забор за 40 часов. Паша и Володя, работая вместе, могут покрасить этот же забор за 48 часов, а Володя и Игорь, работая вместе, — за 60 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

Ответ: ____________________________.

10 На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: ____________________________.

11 Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+6)^8 - 8x + 7$.

Ответ: ____________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $2\sin^3 x = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

13 Основанием правильной пирамиды $PABCD$ является квадрат $ABCD$. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.
а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.
б) Найдите площадь сечения пирамиды, если $AB = 24$.

14 Решите неравенство $\frac{4\cdot 3^{2x} - 7\cdot 3^{x+1} + 27}{3^{x+3} - 3^{2x+2}} \le \frac{1}{3^{x+2}}$.

15 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 11 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 7 % в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

16 В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 18$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases}(x-4a+3)^2+(y-3a-1)^2 = a-4,\\ 4x-3y = 2a+5\end{cases}$$
не имеет решений.

18 У Ани есть 400 рублей. Ей нужно купить конверты (большие и маленькие). Большой конверт стоит 22 рубля, а маленький — 17 рублей. При этом число маленьких конвертов не должно отличаться от числа больших конвертов больше чем на пять.
а) Может ли Аня купить 19 конвертов?
б) Может ли Аня купить 23 конверта?
в) Какое наибольшее число конвертов может купить Аня?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2210309-2210312 (профильный уровень) от 28.02.2023

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2210309	24	0,2	0,2	0,5	1	7	- 1	6	10	- 50	18
2210310	7	1	0,3	0,6	3	25	- 5	7	9	- 31	8
2210311	16	52	0,125	0,5	5	- 34	2	0,8	32	- 0,2	- 5
2210312	44	60	0,12	0,25	7	10,5	1	0,4	24	- 0,4	- 4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

12 а) Решите уравнение $2\sin^3 x = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

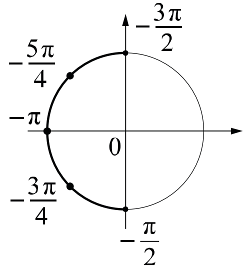
а) Запишем уравнение в виде

$$2\sin^3 x - \sin x = 0; \quad \sin x\cdot\left(2\sin^2 x - 1\right) = 0.$$

Значит, или $\sin x = 0$, откуда следует, что $x = \pi k$, $k\in Z$, или $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда следует, что $x = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Получим числа $-\frac{5\pi}{4}$; $-\pi$; $-\frac{3\pi}{4}$.



Ответ: а) πk, $k\in Z$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; б) $-\frac{5\pi}{4}$; $-\pi$; $-\frac{3\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

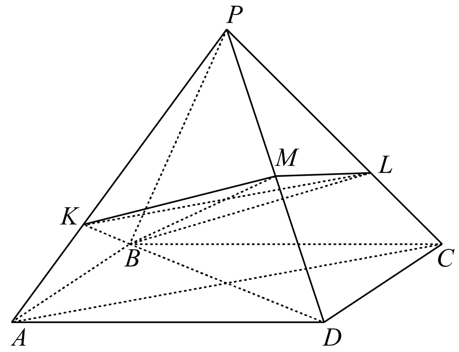
13 Основанием правильной пирамиды $PABCD$ является квадрат $ABCD$. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды, если $AB = 24$.

Решение.

а) Пусть точка M — середина ребра PD. Так как прямая BM лежит в плоскости сечения, перпендикулярного PD, отрезки BM и PD перпендикулярны, то есть в треугольнике BPD медиана BM является высотой. Значит, $BP = BD$, но, так как $PB = PD$, треугольник BPD равносторонний, а поэтому $\angle PBD = 60°$, что и требовалось доказать.



б) Из доказанного следует, что $PA = AB\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$ и $BM = 12\sqrt{6}$ как высота равностороннего треугольника BPD.

По теореме косинусов в треугольнике APD получаем:

$AD^2 = AP^2 + PD^2 - 2AP\cdot PD\cdot\cos\angle APD$, следовательно, $\cos\angle APD = \frac{3}{4}$.

Пусть четырёхугольник $BKML$ — указанное сечение (точка K лежит на ребре PA, а точка L — на ребре PC). Так как отрезки KM и PD перпендикулярны, $PK = \frac{PM}{\cos\angle APD} = 16\sqrt{2}$. Аналогично $PL = 16\sqrt{2}$. Значит, $PK = PL$, а потому треугольник PKL подобен треугольнику PAC. Поэтому $LK = 16\sqrt{2}$. Кроме того, прямые KL и AC параллельны, а прямые AC и BM перпендикулярны, так как AC перпендикулярна плоскости BPD, а прямая BM лежит в этой плоскости. Значит, прямые KL и BM перпендикулярны. Поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}BM\cdot KL = \frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{6}\cdot 16\sqrt{2} = 192\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $192\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\frac{4\cdot 3^{2x}-7\cdot 3^{x+1}+27}{3^{x+3}-3^{2x+2}}\le\frac{1}{3^{x+2}}$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{4\cdot 3^{2x}-21\cdot 3^{x}+27}{3^{x+2}\left(3-3^{x}\right)}\le\frac{1}{3^{x+2}};$$

$$\frac{\left(4\cdot 3^{x}-9\right)\left(3^{x}-3\right)}{3^{x+2}\left(3-3^{x}\right)}\le\frac{1}{3^{x+2}};$$

$$\begin{cases}4\cdot 3^{x}-9\ge -1,\\ x\ne 1;\end{cases}$$

$$\left[\begin{aligned}&\log_3 2\le x<1\\ &x>1.\end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left[\log_3 2;1\right)$; $\left(1;+\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\log_3 2$. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 11 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 7 % в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 11 %, т. е. увеличивается в 1,11 раза. Поэтому через два года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1{,}11^2 S=1{,}2321S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1{,}07\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)S,$$

где n — некоторое натуральное число процентов.

По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1{,}07\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)S>1{,}2321S,$$

$$1+\frac{n}{100}>\frac{12321}{10700}=1{,}151\ldots$$

При $n=16$ неравенство

$$1{,}16>1{,}151\ldots$$

верно, а при $n=15$ неравенство

$$1{,}15>1{,}151\ldots$$

неверно, как и при всех меньших n.

Ответ: 16.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

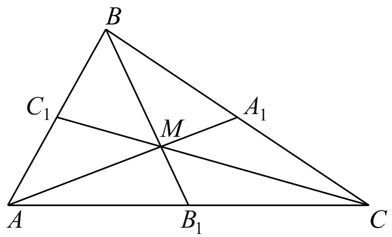
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 18$.

Решение.

а) Медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$



Следовательно, треугольники AB_1B и CB_1B равнобедренные, причём $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$. Сумма всех этих четырёх углов равна $180°$. Тогда $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90°$.

Значит, треугольник ABC прямоугольный.

б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Треугольник C_1BC также прямоугольный. Поэтому

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

Сложим полученные равенства:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}\left(AB^2 + BC^2\right) = \frac{5}{4}AC^2 = 405.$$

Ответ: б) 405.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-4a+3)^2+(y-3a-1)^2=a-4,\\ 4x-3y=2a+5\end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

При $a<4$ система не имеет решений.

При $a=4$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases}(x-13)^2+(y-13)^2=0,\\ 4x-3y=13.\end{cases}$$

Первому уравнению удовлетворяет только пара $(13;13)$, которая также удовлетворяет второму уравнению, поэтому при $a=4$ система имеет единственное решение.

При $a>4$ первое уравнение задаёт окружность с центром в точке $(4a-3;\,3a+1)$, радиус которой равен $\sqrt{a-4}$. Второе уравнение задаёт прямую $4x-3y=2a+5$. Следовательно, система не имеет решений тогда и только тогда, когда расстояние от центра $(4a-3;\,3a+1)$ окружности до прямой $4x-3y=2a+5$ больше радиуса $\sqrt{a-4}$ окружности. Получаем

$$\begin{cases}\dfrac{\left|4(4a-3)-3(3a+1)-2a-5\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}>\sqrt{a-4},\\ a>4;\end{cases}\quad \begin{cases}|5a-20|>5\sqrt{a-4},\\ a>4;\end{cases}\quad a>5.$$

Следовательно, система не имеет решений при $a\in(-\infty;\,4)\cup(5;\,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\,4)\cup(5;\,+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a = 5$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a: $(-\infty; 4)$ или $(5; +\infty)$, возможно, с включением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружности (аналитически или графически). ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

18 У Ани есть 400 рублей. Ей нужно купить конверты (большие и маленькие). Большой конверт стоит 22 рубля, а маленький — 17 рублей. При этом число маленьких конвертов не должно отличаться от числа больших конвертов больше чем на пять.

а) Может ли Аня купить 19 конвертов?

б) Может ли Аня купить 23 конверта?

в) Какое наибольшее число конвертов может купить Аня?

Решение.

а) Аня может купить, например, 10 больших и 9 маленьких конвертов:

$$10 \cdot 22 + 9 \cdot 17 = 373 \text{ (руб.)}.$$

б) Дешевле всего 23 конверта будут стоить, если купить наибольшее возможное число маленьких конвертов и наименьшее возможное число больших, то есть если купить 9 больших и 14 маленьких, поскольку если больших меньше 9, то маленьких больше 14, и в этом случае разность между числом больших и маленьких больше чем 5. Но тогда стоимость покупки составляет

$$9 \cdot 22 + 14 \cdot 17 = 436 \text{ (руб.)},$$

что больше, чем имеющиеся 400 рублей.

в) Пусть n и m — число маленьких и больших конвертов соответственно. Тогда

$$\begin{cases} 22m + 17n \le 400, \\ |m - n| \le 5, \\ m, n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Положим $s = n + m$, тогда

$$\begin{cases} 5m + 17s \le 400, \\ -5 \le 2m - s \le 5, \\ m = 0, 1, \ldots, s; \end{cases} \quad \begin{cases} m \le \dfrac{400 - 17s}{5}, \\ \dfrac{s-5}{2} \le m \le \dfrac{s+5}{2}, \\ m = 0, 1, \ldots, s. \end{cases}$$

Следовательно, $\dfrac{s-5}{2} \le \dfrac{400 - 17s}{5}$, а значит, $s \le \dfrac{825}{39} = 21\dfrac{2}{13}$.

Аня может купить не больше 21 конверта.

Покажем, что Аня может купить 21 конверт.

При $m = 8$, $n = 13$ получаем $8 \cdot 22 + 13 \cdot 17 = 397 < 400$.

Значит, Аня может купить 21 конверт.

Ответ: а) да; б) нет; в) 21.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*