

**Тренировочная работа №4 по МАТЕМАТИКЕ****11 класс**30 марта 2023 года  
Вариант МА2210409  
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО \_\_\_\_\_ класс \_\_\_\_\_

**Инструкция по выполнению работы**

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

*Желаем успеха!***Справочные материалы**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

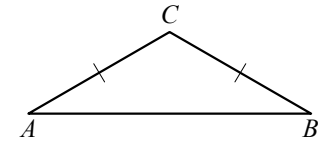
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

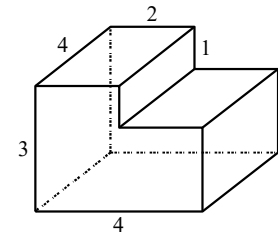
**Ответом к каждому из заданий 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.**

- 1 В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $33^\circ$ , стороны  $AC$  и  $BC$  равны. Найдите угол  $C$ . Ответ дайте в градусах.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3 При изготовлении подшипников диаметром 69 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше чем на 0,01 мм, равна 0,967. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 68,99 мм или больше чем 69,01 мм.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 4 Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,56. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Ответ: \_\_\_\_\_.

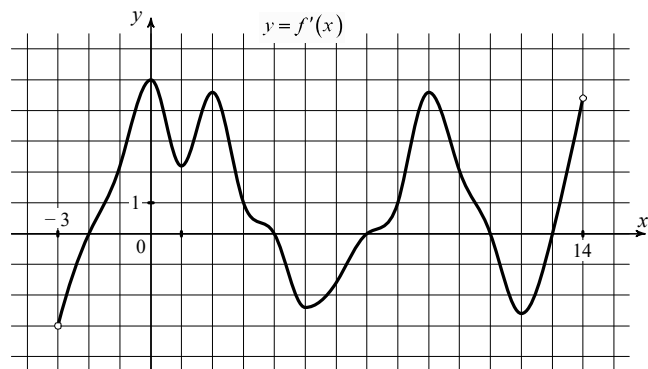
5 Найдите корень уравнения  $\log_7(5-x)=2$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

6 Найдите значение выражения  $\frac{\sqrt[4]{10} \cdot \sqrt[16]{10}}{\sqrt[12]{10}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

7 На рисунке изображён график функции  $y=f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-3;14)$ . Найдите промежутки возрастания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: \_\_\_\_\_.

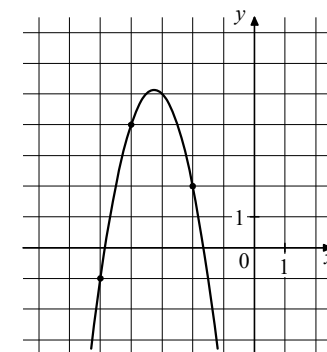
8 После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время  $t$  падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле  $h=5t^2$ , где  $h$  — расстояние в метрах,  $t$  — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,8 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,4 с? Ответ дайте в метрах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

9 Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 50 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 15 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: \_\_\_\_\_.

10 На рисунке изображён график функции  $f(x)=ax^2+bx+c$ . Найдите значение  $f(1)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

11 Найдите точку максимума функции  $y=(44-x)e^{x+44}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение  $\log_7(\sqrt{3} \cos x - \sin 2x + 49) = 2$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$ .

13 На высоте  $SO$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  взяли точку  $M$  так, что  $SM : MO = 2 : 3$ . Через точку  $M$  параллельно грани  $ADS$  провели плоскость  $\alpha$ .

а) Докажите, что расстояние от прямой  $BC$  до плоскости  $\alpha$  относится к расстоянию между прямыми  $BC$  и  $AS$  как  $4 : 5$ .

б) Найдите расстояние от прямой  $BC$  до плоскости  $\alpha$ , если все рёбра пирамиды равны 10.

14 Решите неравенство  $98^x - 2 \cdot 14^x - 70^x + 2 \cdot 10^x \geq 0$ .

15 В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 22 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2023	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,6S$	$0,3S$	0

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором каждый платёж будет меньше 6 млн рублей.

16 Окружность с центром  $O$  вписана в треугольник  $ABC$ . Касательная к окружности пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно.

а) Докажите, что сумма углов  $AOD$  и  $BOE$  равна  $180^\circ$ .

б) Найдите  $DE$ , если  $AC = BC$ , радиус окружности равен 3,

$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right) = \frac{5\sqrt{3}}{11}$ , а разность углов  $AOD$  и  $BOE$  равна  $60^\circ$ .

17 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых множество значений

функции  $y = \frac{5a + 50x - 10ax}{25x^2 + 10ax + a^2 + 16}$  содержит отрезок  $[0; 1]$ .

18 а) Существует ли четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 18 раз больше суммы цифр этого числа?

б) Существует ли четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 200 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр десятичной записи которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

[math100.ru](http://math100.ru)

Ответы на тренировочные варианты 2210409-2210412 (профильный уровень) от  
30.03.2023

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
<b>2210409</b>	114	40	0,033	0,168	- 44	1	6	2,4	60	- 31	43
<b>2210410</b>	126	35	0,039	0,15	- 11	1	9	1,95	56	- 50	34
<b>2210411</b>	77	10	0,24	0,44	- 2,5	- 3	6	18,75	48	11	33
<b>2210412</b>	64	14	0,17	0,64	- 18	- 15	5	20	63	34	44

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

12

- а) Решите уравнение  $\log_7(\sqrt{3} \cos x - \sin 2x + 49) = 2$ .  
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$ .

**Решение.**

а) Преобразуем уравнение:

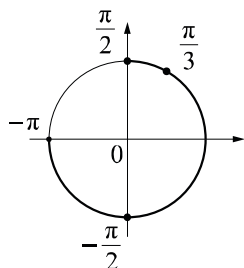
$$\sqrt{3} \cos x - \sin 2x + 49 = 49; \quad \sqrt{3} \cos x - 2 \sin x \cos x = 0;$$

$$\cos x \cdot (\sqrt{3} - 2 \sin x) = 0.$$

Значит, либо  $\cos x = 0$ , откуда следует, что  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , либо  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

откуда следует, что  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ , или  $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ .

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$ .



Получим числа  $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$ .

**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

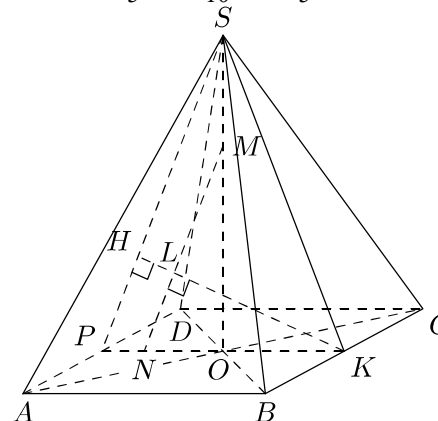
13

На высоте  $SO$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  взяли точку  $M$  так, что  $SM : MO = 2 : 3$ . Через точку  $M$  параллельно грани  $ADS$  провели плоскость  $\alpha$ .

- а) Докажите, что расстояние от прямой  $BC$  до плоскости  $\alpha$  относится к расстоянию между прямыми  $BC$  и  $AS$  как  $4 : 5$ .  
 б) Найдите расстояние от прямой  $BC$  до плоскости  $\alpha$ , если все рёбра пирамиды равны 10.

**Решение.**

а) Пусть  $K$  и  $P$  — середины рёбер  $BC$  и  $AD$  соответственно (см. рисунок). Плоскость  $SPO$  пересекает параллельные плоскости  $\alpha$  и  $ADS$  по параллельным прямым  $SP$  и  $MN$ , где  $N$  — такая точка на отрезке  $OP$ , что  $ON : NP = 3 : 2$ . Значит,  $PN = \frac{2}{5}OP = \frac{2}{10}PK = \frac{1}{5}PK$ , т. е.  $KN : KP = 4 : 5$ .



Плоскость  $ADS$  параллельна прямой  $BC$  и проходит через прямую  $AS$ , поэтому расстояние между скрещивающимися прямыми  $BC$  и  $AS$  равно расстоянию от прямой  $BC$  до плоскости  $ADS$ .

В треугольнике  $PKS$  проведём высоту  $KH$ . Так как прямая  $KH$  перпендикулярна прямым  $SP$  и  $AD$ , лежащим в плоскости  $ADS$ , она перпендикулярна плоскости  $ADS$ . Значит, расстояние между прямыми  $BC$  и  $AS$  равно  $KH$ .

Пусть  $KH$  пересекает прямую  $MN$  в точке  $L$ . Прямая  $KH$  перпендикулярна плоскости  $ADS$  и перпендикулярна параллельной ей плоскости  $\alpha$ . Прямая  $BC$  параллельна плоскости  $ADS$  и параллельна плоскости  $\alpha$ . Тогда расстояние от прямой  $BC$  до плоскости  $\alpha$  равно  $KL$ . Из подобия треугольников  $KPH$  и  $KNL$  следует, что  $KL : KH = KN : KP = 4 : 5$ .

б) Найдём высоту  $SP$  треугольника  $ADS$ :  $SP = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ .

Из треугольника  $SOP$  по теореме Пифагора находим, что  $SO = \sqrt{SP^2 - PO^2} = 5\sqrt{2}$ .

Найдём высоту  $KH$  треугольника  $SPK$ :  $KH = \frac{SO \cdot PK}{SP} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 10}{5\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ .

Следовательно,  $KL = \frac{4}{5}KH = \frac{4 \cdot 10\sqrt{6}}{5 \cdot 3} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ .

**Ответ:** б)  $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ .

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ . ИЛИ При обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

**14** Решите неравенство  $98^x - 2 \cdot 14^x - 70^x + 2 \cdot 10^x \geq 0$ .

**Решение.**

Разложим левую часть неравенства на множители:

$$2^x(7^x - 2)(7^x - 5^x) \geq 0.$$

Учитывая, что  $2^x > 0$  при всех  $x$ , получаем:

$$\begin{cases} 7^x - 2 \geq 0, \\ 7^x - 5^x \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 7^x - 2 \leq 0, \\ 7^x - 5^x \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \log_7 2, \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq \log_7 2, \\ x \leq 0, \end{cases}$$

откуда  $x \leq 0, x \geq \log_7 2$ .

**Ответ:**  $x \leq 0, x \geq \log_7 2$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек $\log_7 2$ и/или 0. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**15** В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:  
— каждый январь долг увеличивается на 22 % по сравнению с концом предыдущего года;  
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;  
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2023	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,6S$	$0,3S$	0

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором каждый платёж будет меньше 6 млн рублей.

**Решение.**

В январе 2024 года долг будет составлять  $1,22S$  млн рублей, а в июле 2024 года —  $0,6S$  млн рублей. Значит, платёж в 2024 году составит  $0,62S$  млн рублей.

В январе 2025 года долг будет составлять  $1,22 \cdot 0,6S = 0,732S$  млн рублей, а в июле 2025 года —  $0,3S$  млн рублей. Значит, платёж в 2025 году составит  $0,432S$  млн рублей.

В январе 2026 года долг перед банком составит  $1,22 \cdot 0,3S = 0,366S$  млн рублей, а в июле — 0 рублей. Значит, платёж в 2026 году составит  $0,366S$  млн рублей.

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 0,62S < 6, \\ 0,432S < 6, \\ 0,366S < 6, \end{cases} \quad \text{следовательно, } S < \frac{300}{31} = 9\frac{21}{31}.$$

Наибольшее целое решение этой системы неравенств — 9.

**Ответ:** 9 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**16** Окружность с центром  $O$  вписана в треугольник  $ABC$ . Касательная к окружности пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно.

а) Докажите, что сумма углов  $AOD$  и  $BOE$  равна  $180^\circ$ .

б) Найдите  $DE$ , если  $AC = BC$ , радиус окружности равен 3,

$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right) = \frac{5\sqrt{3}}{11}$ , а разность углов  $AOD$  и  $BOE$  равна  $60^\circ$ .

**Решение.**

а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому  $AO$  и  $BO$  — биссектрисы углов  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$ , а  $DO$  и  $EO$  — биссектрисы внешних углов при вершинах  $D$  и  $E$  треугольника  $DEC$ .

Тогда  $\angle AOD = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ADE - \frac{1}{2}\angle BAD$  и

$\angle BOE = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BED - \frac{1}{2}\angle ABE$ , следовательно,

$\angle AOD + \angle BOE = 360^\circ - \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$ .

б) Пусть вписанная окружность радиусом 3 касается боковых сторон  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, а отрезка  $DE$  — в точке  $K$ .

По свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки,  $DK = DM$  и  $KE = EN$ , откуда следует, что  $DE = DK + KE = DM + EN$ .

Из условия  $\angle AOD - \angle BOE = 60^\circ$  и доказанного равенства в пункте а)  $\angle AOD + \angle BOE = 180^\circ$  получаем:  $\angle AOD = 120^\circ$  и  $\angle BOE = 60^\circ$ .

Поскольку  $AC = BC$ , углы  $OAD$  и  $OBE$  равны как половины углов при основании равнобедренного треугольника  $ABC$ .

Обозначим  $\angle OAD = \angle OBE = \alpha$ , тогда  $\angle DOM = 120^\circ - (90^\circ - \alpha) = 30^\circ + \alpha$  и  $\angle EON = 60^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha - 30^\circ$ .

В прямоугольном треугольнике  $DOM$  известно, что  $OM = 3$ , следовательно,

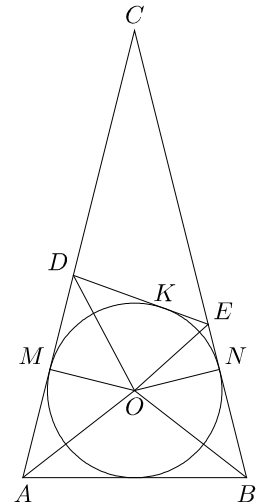
$$DM = 3 \cdot \operatorname{tg}(30^\circ + \alpha) = 3 \cdot \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} \alpha} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5\sqrt{3}}{11}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{11}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}.$$

Аналогично в прямоугольном треугольнике  $EON$

$$EN = 3 \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 30^\circ) = 3 \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 30^\circ} = 3 \cdot \frac{\frac{5\sqrt{3}}{11} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{5\sqrt{3}}{11} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Получаем  $DE = DM + EN = \frac{13\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{55\sqrt{3}}{12}$ .

**Ответ:** б)  $\frac{55\sqrt{3}}{12}$ .



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ . ИЛИ При обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых множество значений функции  $y = \frac{5a + 50x - 10ax}{25x^2 + 10ax + a^2 + 16}$  содержит отрезок  $[0; 1]$ .

**Решение.**

Запишем функцию в виде  $y = f(x) = \frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16}$ . Её областью

определения является вся числовая прямая, поскольку знаменатель не обращается в ноль. Данная функция непрерывна на всей числовой прямой.

При  $x$  стремящемся к  $+\infty$  или  $-\infty$  значение функции  $f(x) = \frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16}$

стремится к 0. Учитывая поведение функции на  $+\infty$  и  $-\infty$  и наличие двух критических точек — точки минимума и точки максимума, следует, что множеством значений функции является отрезок. Тогда, для того чтобы множество значений функции содержало отрезок  $[0; 1]$ , оно должно содержать точки 0 и 1. Таким образом, условие задачи выполнено для тех и только тех значений  $a$ , для которых имеют решения уравнения

$$f(x) = \frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16} = 0 \text{ и } f(x) = \frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16} = 1.$$

Первое уравнение:

$$\frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16} = 0; \quad 10(a - 5)x = 5a, \quad x = \frac{a}{2(a - 5)}.$$

Уравнение имеет решение при любом  $a \neq 5$ .

Второе уравнение:

$$\frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16} = 1; \quad 25x^2 + 10(2a - 5)x + a^2 - 5a + 16 = 0.$$

Уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D = 100(2a - 5)^2 - 100(a^2 - 5a + 16) \geq 0;$$

$$100(4a^2 - 20a + 25 - a^2 + 5a - 16) \geq 0;$$

$$300(a^2 - 5a + 3) \geq 0;$$

$$\left(a - \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(a - \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right) \geq 0.$$

Решением этого неравенства являются множества  $\left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right]$  и

$\left[\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$ . Следовательно, условию задачи удовлетворяют значения

$$a \in \left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; 5\right) \cup (5; +\infty).$$

**Ответ:**  $\left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right], \left[\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; 5\right), (5; +\infty)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только исключением точек $\frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ и/или $\frac{5 + \sqrt{13}}{2}$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только включением точки 5. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию множества значений функции	1



Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

- 18** а) Существует ли четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 18 раз больше суммы цифр этого числа?  
 б) Существует ли четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 200 раз больше суммы цифр этого числа?  
 в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр десятичной записи которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

**Решение.**

а) Произведение цифр числа 3366 равно 324, а сумма цифр равна 18, то есть в 18 раз меньше произведения.

б) Предположим, что такое число  $n = \overline{abcd}$  существует. Очевидно, что среди цифр его десятичной записи не может быть нулей.

Имеем  $a \cdot b \cdot c \cdot d = 200(a + b + c + d)$ . Правая часть этого равенства делится на 25, поэтому среди цифр найдутся две цифры 5. Так как при перестановке местами цифр числа  $n$  равенство  $a \cdot b \cdot c \cdot d = 200(a + b + c + d)$  остаётся верным, будем считать, что  $c = 5$  и  $d = 5$ .

Тогда  $a \cdot b = 8(a + b + 10) \geq 8 \cdot 12 > 9 \cdot 9 \geq a \cdot b$ . Получаем противоречие.

в) Пусть  $n = \overline{abcd}$  — такое число. Как и ранее, заметим, что среди его цифр не может быть нулей. Имеем  $a \cdot b \cdot c \cdot d = 50(a + b + c + d)$ . Правая часть этого равенства делится на 25, поэтому среди цифр найдутся две цифры 5. Будем считать, что  $c = 5$  и  $d = 5$ .

Тогда  $a \cdot b = 2(a + b + 10)$ . Так как правая часть последнего равенства чётна,  $a$  или  $b$  чётны. Будем считать, что чётно  $b$ .

Если  $b = 2$ , то  $a = a + 12$ , что невозможно.

Если  $b = 4$ , то  $2a = a + 14$ ;  $a = 14$ , что невозможно.

Если  $b = 6$ , то  $3a = a + 16$ ;  $a = 8$ . Число 8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр, удовлетворяют условию задачи.

Если  $b = 8$ , то  $4a = a + 18$ ;  $a = 6$ . Число 6855 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр, удовлетворяют условию задачи.

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ , $b$ и $v$	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте $v$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $b$	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ и $b$ . ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте $v$	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $b$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4