

**Тренировочная работа №4 по МАТЕМАТИКЕ****11 класс**30 марта 2023 года  
Вариант МА2210411  
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО \_\_\_\_\_ класс \_\_\_\_\_

**Инструкция по выполнению работы**

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

*Желаем успеха!***Справочные материалы**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

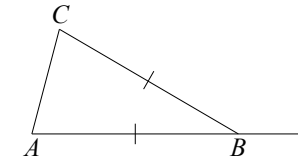
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

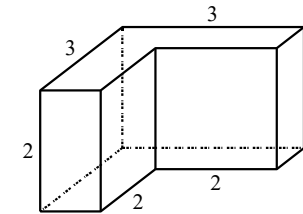
**Ответом к каждому из заданий 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.**

- 1 В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = BC$ . Внешний угол при вершине  $B$  равен  $154^\circ$ . Найдите угол  $C$ . Ответ дайте в градусах.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3 Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем  $36,8^\circ\text{C}$ , равна  $0,76$ . Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется  $36,8^\circ\text{C}$  или выше.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 4 В аэропорте два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна  $0,35$ . Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна  $0,14$ . Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

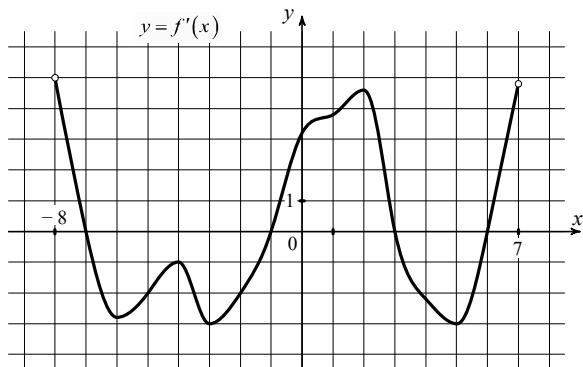
5 Найдите корень уравнения  $\log_2(12 - 6x) = 3\log_2 3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

6 Найдите значение выражения  $\left(\sqrt{1\frac{1}{7}} - \sqrt{2\frac{4}{7}}\right) : \sqrt{\frac{2}{63}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

7 На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-8; 7)$ . Найдите промежутки убывания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: \_\_\_\_\_.

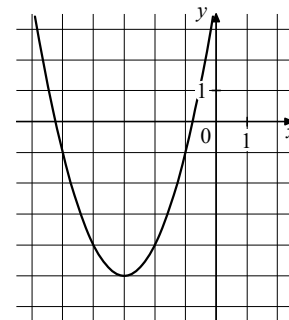
8 При температуре  $0^\circ\text{C}$  рельс имеет длину  $l_0 = 20$  м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону  $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$ , где  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$  — коэффициент теплового расширения,  $t^\circ$  — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 4,5 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ: \_\_\_\_\_.

9 Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 12 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 40 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: \_\_\_\_\_.

10 На рисунке изображён график функции  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , где числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые. Найдите значение  $f(1)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

11 Найдите точку минимума функции  $y = (32 - x)e^{32-x}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 12** а) Решите уравнение  $\log_{\frac{1}{5}}(\cos x + \sin 2x + 25) = -2$ .
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ .
- 13** На высоте  $SO$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  взяли точку  $M$  так, что  $SM:MO=1:2$ . Через точку  $M$  параллельно грани  $ADS$  провели плоскость  $\alpha$ .
- а) Докажите, что расстояние от прямой  $BC$  до плоскости  $\alpha$  относится к расстоянию между прямыми  $BC$  и  $AS$  как  $5:6$ .
- б) Найдите расстояние от прямой  $BC$  до плоскости  $\alpha$ , если все рёбра пирамиды равны 18.

**14** Решите неравенство  $72^x - 5 \cdot 12^x - 36^x + 5 \cdot 6^x \geq 0$ .

- 15** В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
  - в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2023	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,7S$	$0,4S$	$0$

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором каждый платёж будет меньше 4 млн рублей.

- 16** Окружность с центром  $O$  вписана в треугольник  $ABC$ . Касательная к окружности пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно.
- а) Докажите, что сумма углов  $AOD$  и  $BOE$  равна  $180^\circ$ .
- б) Найдите  $DE$ , если  $AC = BC$ , радиус окружности равен 1,  
 $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right) = \frac{3\sqrt{3}}{7}$ , а разность углов  $AOD$  и  $BOE$  равна  $60^\circ$ .
- 17** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых множество значений функции  $y = \frac{6a + 36x - 6ax}{9x^2 + 6ax + a^2 + 15}$  содержит отрезок  $[0; 1]$ .
- 18** а) Существует ли четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа?
- б) Существует ли четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 343 раза больше суммы цифр этого числа?
- в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр десятичной записи которых в 49 раз больше суммы цифр этого числа.

[math100.ru](http://math100.ru)

Ответы на тренировочные варианты 2210409-2210412 (профильный уровень) от  
30.03.2023

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
<b>2210409</b>	114	40	0,033	0,168	- 44	1	6	2,4	60	- 31	43
<b>2210410</b>	126	35	0,039	0,15	- 11	1	9	1,95	56	- 50	34
<b>2210411</b>	77	10	0,24	0,44	- 2,5	- 3	6	18,75	48	11	33
<b>2210412</b>	64	14	0,17	0,64	- 18	- 15	5	20	63	34	44

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

**12**

- а) Решите уравнение  $\log_{\frac{1}{5}}(\cos x + \sin 2x + 25) = -2$ .  
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ .

**Решение.**

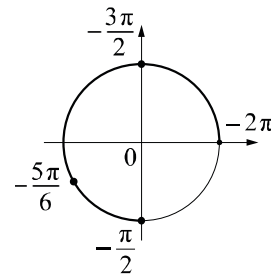
а) Преобразуем уравнение:

$$\cos x + \sin 2x + 25 = 25; \quad 2\sin x \cos x + \cos x = 0; \quad \cos x \cdot (2\sin x + 1) = 0.$$

Значит, либо  $\cos x = 0$ , откуда следует, что  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , либо  $\sin x = -\frac{1}{2}$ ,

откуда следует, что  $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ , или  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ .

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ .



Получим числа  $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}$ .

**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

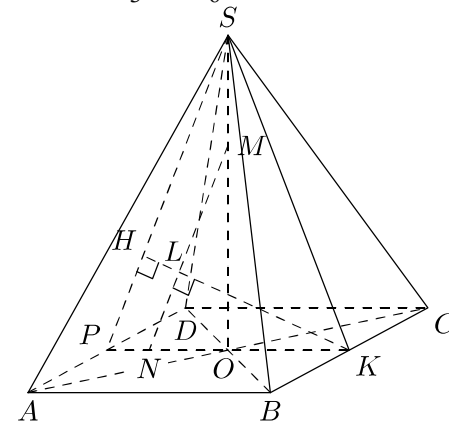
**13**

На высоте  $SO$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  взяли точку  $M$  так, что  $SM : MO = 1 : 2$ . Через точку  $M$  параллельно грани  $ADS$  провели плоскость  $\alpha$ .

- а) Докажите, что расстояние от прямой  $BC$  до плоскости  $\alpha$  относится к расстоянию между прямыми  $BC$  и  $AS$  как 5:6.  
 б) Найдите расстояние от прямой  $BC$  до плоскости  $\alpha$ , если все рёбра пирамиды равны 18.

**Решение.**

а) Пусть  $K$  и  $P$  — середины рёбер  $BC$  и  $AD$  соответственно (см. рисунок). Плоскость  $SPO$  пересекает параллельные плоскости  $\alpha$  и  $ADS$  по параллельным прямым  $SP$  и  $MN$ , где  $N$  — такая точка на отрезке  $OP$ , что  $ON : NP = 2 : 1$ . Значит,  $PN = \frac{1}{3}OP = \frac{1}{6}PK$ , т. е.  $KN : KP = 5 : 6$ .



Плоскость  $ADS$  параллельна прямой  $BC$  и проходит через прямую  $AS$ , поэтому расстояние между скрещивающимися прямыми  $BC$  и  $AS$  равно расстоянию от прямой  $BC$  до плоскости  $ADS$ .

В треугольнике  $PKS$  проведём высоту  $KH$ . Так как прямая  $KH$  перпендикулярна прямым  $SP$  и  $AD$ , лежащим в плоскости  $ADS$ , она перпендикулярна плоскости  $ADS$ . Значит, расстояние между прямыми  $BC$  и  $AS$  равно  $KH$ .

Пусть  $KH$  пересекает прямую  $MN$  в точке  $L$ . Прямая  $KH$  перпендикулярна плоскости  $ADS$  и перпендикулярна параллельной ей плоскости  $\alpha$ . Прямая  $BC$  параллельна плоскости  $ADS$  и параллельна плоскости  $\alpha$ . Тогда расстояние от прямой  $BC$  до плоскости  $\alpha$  равно  $KL$ . Из подобия треугольников  $KPH$  и  $KNL$  следует, что  $KL : KH = KN : KP = 5 : 6$ .

б) Найдём высоту  $SP$  треугольника  $ADS$ :  $SP = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ .

Из треугольника  $SOP$  по теореме Пифагора находим, что  $SO = \sqrt{SP^2 - PO^2} = 9\sqrt{2}$ .

Найдём высоту  $KH$  треугольника  $SPK$ :  $KH = \frac{SO \cdot PK}{SP} = \frac{9\sqrt{2} \cdot 18}{9\sqrt{3}} = 6\sqrt{6}$ .

Следовательно,  $KL = \frac{5}{6}KH = \frac{5 \cdot 6\sqrt{6}}{6} = 5\sqrt{6}$ .

**Ответ:** б)  $5\sqrt{6}$ .

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ . ИЛИ При обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

**14** Решите неравенство  $72^x - 5 \cdot 12^x - 36^x + 5 \cdot 6^x \geq 0$ .

**Решение.**

Разложим левую часть неравенства на множители:

$$2^x(6^x - 5)(6^x - 3^x) \geq 0.$$

Учитывая, что  $2^x > 0$  при всех  $x$ , получаем:

$$\begin{cases} 6^x - 5 \geq 0, \\ 6^x - 3^x \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 6^x - 5 \leq 0, \\ 6^x - 3^x \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \log_6 5, \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq \log_6 5, \\ x \leq 0, \end{cases}$$

откуда  $x \leq 0$ ,  $x \geq \log_6 5$ .

**Ответ:**  $x \leq 0$ ,  $x \geq \log_6 5$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек $\log_6 5$ и/или 0. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**15** В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:  
— каждый январь долг увеличивается на 16% по сравнению с концом предыдущего года;  
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;  
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2023	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором каждый платёж будет меньше 4 млн рублей.

**Решение.**

В январе 2024 года долг будет составлять  $1,16S$  млн рублей, а в июле 2024 года —  $0,7S$  млн рублей. Значит, платёж в 2024 году составит  $0,46S$  млн рублей.

В январе 2025 года долг будет составлять  $1,16 \cdot 0,7S = 0,812S$  млн рублей, а в июле 2025 года —  $0,4S$  млн рублей. Значит, платёж в 2025 году составит  $0,412S$  млн рублей.

В январе 2026 года долг перед банком составит  $1,16 \cdot 0,4S = 0,464S$  млн рублей, а в июле — 0 рублей. Значит, платёж в 2026 году составит  $0,464S$  млн рублей.

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 0,46S < 4, \\ 0,412S < 4, \\ 0,464S < 4, \end{cases} \quad \text{следовательно, } S < \frac{250}{29} = 8\frac{18}{29}.$$

Наибольшее целое решение этой системы неравенств — 8.

**Ответ:** 8 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

**16** Окружность с центром  $O$  вписана в треугольник  $ABC$ . Касательная к окружности пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно.

а) Докажите, что сумма углов  $AOD$  и  $BOE$  равна  $180^\circ$ .

б) Найдите  $DE$ , если  $AC = BC$ , радиус окружности равен 1,

$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right) = \frac{3\sqrt{3}}{7}$ , а разность углов  $AOD$  и  $BOE$  равна  $60^\circ$ .

**Решение.**

а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому  $AO$  и  $BO$  — биссектрисы углов  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$ , а  $DO$  и  $EO$  — биссектрисы внешних углов при вершинах  $D$  и  $E$  треугольника  $DEC$ .

Тогда  $\angle AOD = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ADE - \frac{1}{2}\angle BAD$  и

$\angle BOE = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BED - \frac{1}{2}\angle ABE$ , следовательно,

$\angle AOD + \angle BOE = 360^\circ - \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$ .

б) Пусть вписанная окружность радиусом 1 касается боковых сторон  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, а отрезка  $DE$  — в точке  $K$ .

По свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки,  $DK = DM$  и  $KE = EN$ , откуда следует, что  $DE = DK + KE = DM + EN$ .

Из условия  $\angle AOD - \angle BOE = 60^\circ$  и доказанного равенства в пункте а)  $\angle AOD + \angle BOE = 180^\circ$  получаем:  $\angle AOD = 120^\circ$  и  $\angle BOE = 60^\circ$ .

Поскольку  $AC = BC$ , углы  $OAD$  и  $OBE$  равны как половины углов при основании равнобедренного треугольника  $ABC$ .

Обозначим  $\angle OAD = \angle OBE = \alpha$ , тогда  $\angle DOM = 120^\circ - (90^\circ - \alpha) = 30^\circ + \alpha$  и  $\angle EON = 60^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha - 30^\circ$ .

В прямоугольном треугольнике  $DOM$  известно, что  $OM = 1$ , следовательно,

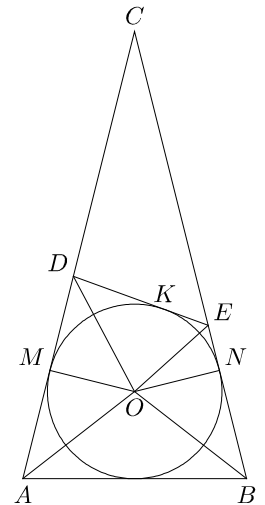
$$DM = \operatorname{tg}(30^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}30^\circ + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}30^\circ \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3}}{7}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{7}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Аналогично в прямоугольном треугольнике  $EON$

$$EN = \operatorname{tg}(\alpha - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}30^\circ}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}30^\circ} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{7} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{3\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{15}.$$

Получаем  $DE = DM + EN = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{15} = \frac{7\sqrt{3}}{5}$ .

**Ответ:** б)  $\frac{7\sqrt{3}}{5}$ .



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ . ИЛИ При обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 17 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых множество значений функции  $y = \frac{6a + 36x - 6ax}{9x^2 + 6ax + a^2 + 15}$  содержит отрезок  $[0; 1]$ .

### Решение.

Запишем функцию в виде  $y = f(x) = \frac{6a + 6(6-a)x}{(3x+a)^2 + 15}$ . Её область

определения является вся числовая прямая, поскольку знаменатель не обращается в ноль. Данная функция непрерывна на всей числовой прямой.

При  $x$  стремящемся к  $+\infty$  или  $-\infty$  значение функции  $f(x) = \frac{6a + 6(6-a)x}{(3x+a)^2 + 15}$

стремится к 0. Учитывая поведение функции на  $+\infty$  и  $-\infty$  и наличие двух критических точек — точки минимума и точки максимума, следует, что множеством значений функции является отрезок. Тогда, для того чтобы множество значений функции содержало отрезок  $[0; 1]$ , оно должно содержать точки 0 и 1. Таким образом, условие задачи выполнено для тех и только тех значений  $a$ , для которых имеют решения уравнения

$$f(x) = \frac{6a + 6(6-a)x}{(3x+a)^2 + 15} = 0 \text{ и } f(x) = \frac{6a + 6(6-a)x}{(3x+a)^2 + 15} = 1.$$

Первое уравнение:

$$\frac{6a + 6(6-a)x}{(3x+a)^2 + 15} = 0; \quad 6(a-6)x = 6a, \quad x = \frac{a}{a-6}.$$

Уравнение имеет решение при любом  $a \neq 6$ .

Второе уравнение:

$$\frac{6a + 6(6-a)x}{(3x+a)^2 + 15} = 1; \quad 9x^2 + 12(a-3)x + a^2 - 6a + 15 = 0.$$

Уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D = 144(a-3)^2 - 36(a^2 - 6a + 15) \geq 0;$$

$$36(4a^2 - 24a + 36 - a^2 + 6a - 15) \geq 0;$$

$$108(a^2 - 6a + 7) \geq 0;$$

$$(a - 3 + \sqrt{2})(a - 3 - \sqrt{2}) \geq 0.$$

Решением этого неравенства являются множества  $(-\infty; 3 - \sqrt{2}]$  и  $[3 + \sqrt{2}; +\infty)$ . Следовательно, условию задачи удовлетворяют значения  $a \in (-\infty; 3 - \sqrt{2}] \cup [3 + \sqrt{2}; 6) \cup (6; +\infty)$ .

**Ответ:**  $(-\infty; 3 - \sqrt{2}]$ ,  $[3 + \sqrt{2}; 6)$ ,  $(6; +\infty)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только исключением точек $3 - \sqrt{2}$ и/или $3 + \sqrt{2}$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только включением точки 6. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию множества значений функции	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4



- 18 а) Существует ли четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа?  
 б) Существует ли четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 343 раза больше суммы цифр этого числа?  
 в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр десятичной записи которых в 49 раз больше суммы цифр этого числа.

**Решение.**

а) Произведение цифр числа 2355 равно 150, а сумма цифр равна 15, то есть в 10 раз меньше произведения.

б) Предположим, что такое число  $n = \overline{abcd}$  существует. Очевидно, что среди цифр его десятичной записи не может быть нулей.

Имеем  $a \cdot b \cdot c \cdot d = 343(a + b + c + d)$ . Правая часть этого равенства делится на 49, поэтому среди цифр найдутся две цифры 7. Так как при перестановке местами цифр числа  $n$  равенство  $a \cdot b \cdot c \cdot d = 343(a + b + c + d)$  остаётся верным, будем считать, что  $c = 7$  и  $d = 7$ .

Тогда  $a \cdot b = 7(a + b + 14) \geq 7 \cdot 16 > 9 \cdot 9 \geq a \cdot b$ . Получаем противоречие.

в) Пусть  $n = \overline{abcd}$  — такое число. Как и ранее, заметим, что среди его цифр не может быть нулей. Имеем  $a \cdot b \cdot c \cdot d = 49(a + b + c + d)$ . Правая часть этого равенства делится на 49, поэтому среди цифр найдутся две цифры 7. Будем считать, что  $c = 7$  и  $d = 7$ .

Тогда  $a \cdot b = a + b + 14$ . Если  $a$  и  $b$  оба нечётные, то  $a + b + 14$  чётно, а  $a \cdot b$  нечётно, противоречие. Следовательно, одна из этих цифр чётная, а значит, чётно и произведение  $a \cdot b$ . Тогда вторая цифра тоже будет чётной.

Если  $b = 2$ , то  $2a = a + 16$ ;  $a = 16$ , что невозможно.

Если  $b = 4$ , то  $4a = a + 18$ ;  $a = 6$ . Число 6477 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр, удовлетворяют условию задачи.

Если  $b = 6$ , то  $6a = a + 20$ ;  $a = 4$ . Число 4677 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр, удовлетворяют условию задачи.

Если  $b = 8$ , то  $8a = a + 22$ ;  $a = \frac{22}{7}$ , что невозможно.

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 6477 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ , $b$ и $v$	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте $v$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $b$	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ и $b$ . ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте $v$	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $b$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4