

**Тренировочная работа №1 по МАТЕМАТИКЕ****11 класс**3 октября 2023 года  
Вариант МА2310111  
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО \_\_\_\_\_ класс \_\_\_\_\_

**Инструкция по выполнению работы**

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

*Желаем успеха!***Справочные материалы**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

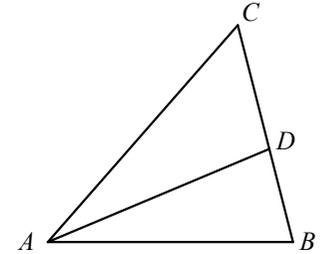
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

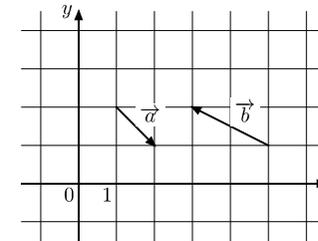
**Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.**

- 1 В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $46^\circ$ ,  $AD$  — биссектриса, угол  $CAD$  равен  $38^\circ$ . Найдите угол  $B$ . Ответ дайте в градусах.



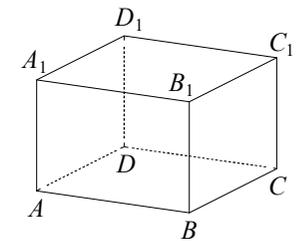
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2 На координатной плоскости изображены векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Найдите длину вектора  $2\vec{a} - \vec{b}$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки  $A, B, C, B_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AB = 7, AD = 7, AA_1 = 6$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 10 из Аргентины, 3 из Бразилии, 7 из Парагвая и 5 из Уругвая. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Бразилии.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 5 При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,2, а при каждом последующем — 0,4. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,8?

Ответ: \_\_\_\_\_.

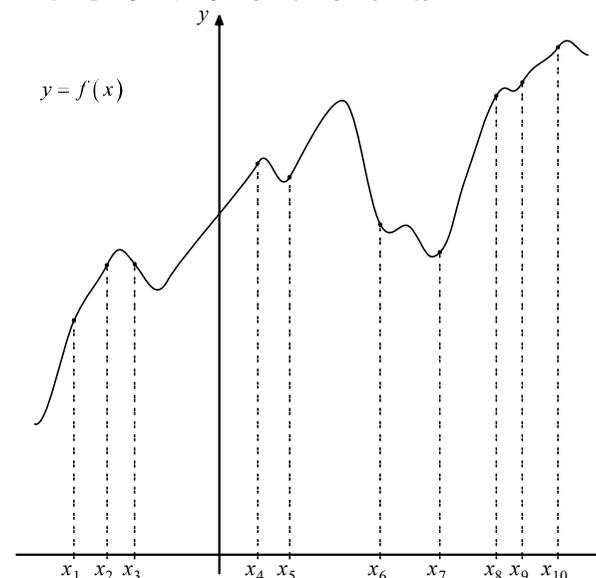
- 6 Решите уравнение  $x = \frac{-3x - 24}{x - 13}$ . Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 Найдите значение выражения  $(a^2 - 36) \cdot \left(\frac{1}{a-6} - \frac{1}{a+6}\right)$  при  $a = \sqrt{17\frac{5}{101}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 8 На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечено десять точек:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$ .



Сколько из отмеченных точек принадлежит промежуткам убывания функции  $f(x)$ ?

Ответ: \_\_\_\_\_.

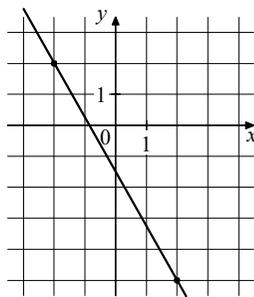
- 9 Груз массой 0,16 кг колеблется на пружине. Его скорость  $v$  меняется по закону  $v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$ , где  $t$  — время с момента начала колебаний,  $T = 2$  с — период колебаний,  $v_0 = 1,5$  м/с. Кинетическая энергия  $E$  (в джоулях) груза вычисляется по формуле  $E = \frac{mv^2}{2}$ , где  $m$  — масса груза в килограммах,  $v$  — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 20 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 15 минут, второй и третий — за 21 минуту, а первый и третий — за 35 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11 На рисунке изображён график функции  $f(x) = kx + b$ . Найдите  $f(-14)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 12 Найдите наименьшее значение функции  $y = \sqrt{x^2 + 4x + 40}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

### Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение  $\sin 2x = \cos\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

- 14 В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  через середину  $M$  диагонали  $AC_1$  проведена плоскость  $\alpha$  перпендикулярно этой диагонали,  $AB = 15$ ,  $BC = 9$ ,  $AA_1 = 12$ .

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  содержит точку  $D_1$ .  
б) Найдите отношение, в котором плоскость  $\alpha$  делит ребро  $A_1 B_1$ .

- 15 Решите неравенство  $x^3 + x^2 - \frac{4x^2 - 3x + 6}{x - 2} \leq 3$ .

- 16 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 8 лет. Условия его возврата таковы:  
— в январе 2026, 2027, 2028 и 2029 годов долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;  
— в январе 2030, 2031, 2032 и 2033 годов долг возрастает на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;  
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;  
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;  
— к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен.  
Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 2190 тысяч рублей?

- 17 На стороне  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  выбрана такая точка  $M$ , что  $AM = MC$ .  
а) Докажите, что центр вписанной в треугольник  $AMD$  окружности лежит на диагонали  $AC$ .  
б) Найдите радиус вписанной в треугольник  $AMD$  окружности, если  $AB = 8$ ,  $BC = 20$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ .

- 18 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $a|x - 2| + (5 - a)|x + 2| + 12 = 0$  имеет ровно два различных корня.

- 19 Сумма цифр трёхзначного числа  $A$  равна  $S$ .  
а) Может ли произведение  $A \cdot S$  быть равно 1435?  
б) Может ли произведение  $A \cdot S$  быть равно 1436?  
в) Найдите наименьшее значение произведения  $A \cdot S$ , если известно, что оно больше 1918.

[math100.ru](http://math100.ru)

Ответы на тренировочные варианты 2310109-2310112 (профильный уровень) от  
03.10.2023

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
<b>2310109</b>	<b>55</b>	<b>28</b>	<b>15</b>	<b>0,28</b>	<b>0,17</b>	<b>- 5</b>	<b>- 15</b>	<b>3</b>	<b>60</b>	<b>26</b>	<b>- 10</b>	<b>7</b>
<b>2310110</b>	<b>42</b>	<b>2</b>	<b>40</b>	<b>0,14</b>	<b>0,15</b>	<b>- 4</b>	<b>- 4</b>	<b>4</b>	<b>60</b>	<b>40</b>	<b>14</b>	<b>9</b>
<b>2310111</b>	<b>58</b>	<b>5</b>	<b>49</b>	<b>0,12</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>12</b>	<b>2</b>	<b>0,18</b>	<b>14</b>	<b>23</b>	<b>6</b>
<b>2310112</b>	<b>41</b>	<b>10</b>	<b>30</b>	<b>0,32</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>18</b>	<b>3</b>	<b>0,05</b>	<b>18</b>	<b>9</b>	<b>8</b>

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

13

- а) Решите уравнение  $\sin 2x = \cos\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)$ .
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

**Решение.**

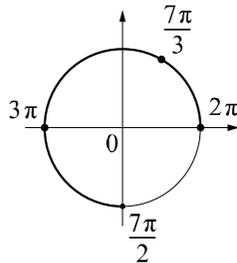
а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2\sin x \cos x = \sin x; \quad \sin x \cdot (2\cos x - 1) = 0.$$

Значит, либо  $\sin x = 0$ , откуда следует, что  $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , либо  $\cos x = \frac{1}{2}$ ,

откуда следует, что  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ , или  $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ .

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ .



Получим числа  $2\pi; \frac{7\pi}{3}; 3\pi$ .

**Ответ:** а)  $\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ ; б)  $2\pi; \frac{7\pi}{3}; 3\pi$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  через середину  $M$  диагонали  $AC_1$  проведена плоскость  $\alpha$  перпендикулярно этой диагонали,  $AB = 15, BC = 9, AA_1 = 12$ .

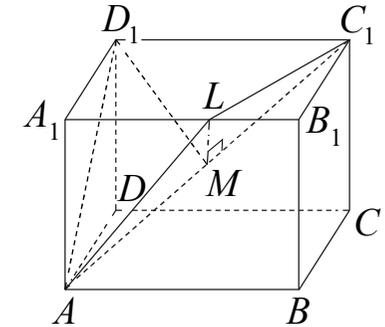
- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  содержит точку  $D_1$ .
- б) Найдите отношение, в котором плоскость  $\alpha$  делит ребро  $A_1 B_1$ .

**Решение.**

а) В треугольнике  $ADD_1$  имеем

$$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = \sqrt{BC^2 + AA_1^2} = 15.$$

В треугольнике  $AC_1 D_1$  стороны  $AD_1$  и  $C_1 D_1$  равны. Значит, этот треугольник равнобедренный, а его медиана  $D_1 M$  является его высотой. Следовательно, точка  $D_1$  лежит в плоскости, проходящей через точку  $M$  перпендикулярно прямой  $AC_1$ , а такая плоскость единственная, и это плоскость  $\alpha$ .



б) Обозначим точку пересечения плоскости  $\alpha$  и прямой  $A_1 B_1$  через  $L$ . Поскольку плоскость  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $AC_1$ , в треугольнике  $ALC_1$  медиана  $LM$  является высотой. Следовательно,  $AL = LC_1$ .

Пусть  $A_1 L = x$ , тогда  $LB_1 = 15 - x$ . В прямоугольных треугольниках  $AA_1 L$  и  $C_1 B_1 L$  имеем

$$AA_1^2 + A_1 L^2 = AL^2, \quad C_1 B_1^2 + B_1 L^2 = C_1 L^2.$$

Следовательно,

$$AA_1^2 + A_1 L^2 = C_1 B_1^2 + B_1 L^2; \quad 144 + x^2 = 81 + (15 - x)^2;$$

$$x^2 + 144 = x^2 - 30x + 306; \quad x = \frac{27}{5}.$$

Значит,  $A_1 L = \frac{27}{5}, LB_1 = \frac{48}{5}$ . Таким образом,  $A_1 L : LB_1 = 27 : 48 = 9 : 16$ .

**Ответ:** б) 9:16.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ . ИЛИ При обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	1
Обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

15

Решите неравенство  $x^3 + x^2 - \frac{4x^2 - 3x + 6}{x - 2} \leq 3$ .

**Решение.**

Преобразуем неравенство:

$$x^3 + x^2 - \frac{4x^2}{x-2} \leq 0; \quad \frac{x^4 - x^3 - 6x^2}{x-2} \leq 0; \quad \frac{x^2(x+2)(x-3)}{x-2} \leq 0.$$

Получаем  $x \leq -2$ ;  $x = 0$ ;  $2 < x \leq 3$ .

**Ответ:**  $(-\infty; -2]$ ;  $0$ ;  $(2; 3]$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек $-2$ и/или $3$ . ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 8 лет. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028 и 2029 годов долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2030, 2031, 2032 и 2033 годов долг возрастает на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 2190 тысяч рублей?

**Решение.**

Пусть сумма кредита равна  $S$  тысяч рублей. По условию долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на июль 2025–2033 годов должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$S; \frac{7S}{8}; \frac{6S}{8}; \frac{5S}{8}; \frac{4S}{8}; \frac{3S}{8}; \frac{2S}{8}; \frac{S}{8}; 0.$$

В январе каждого года с 2026 по 2029 долг возрастает на 20 %, а в январе каждого года с 2030 по 2033 — на 14 %, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) в январе 2026–2033 годов такова:

$$1,2 \cdot S; 1,2 \cdot \frac{7S}{8}; 1,2 \cdot \frac{6S}{8}; 1,2 \cdot \frac{5S}{8}; 1,14 \cdot \frac{4S}{8}; 1,14 \cdot \frac{3S}{8}; 1,14 \cdot \frac{2S}{8}; 1,14 \cdot \frac{S}{8}.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$0,2 \cdot S + \frac{S}{8}; 0,2 \cdot \frac{7S}{8} + \frac{S}{8}; 0,2 \cdot \frac{6S}{8} + \frac{S}{8}; 0,2 \cdot \frac{5S}{8} + \frac{S}{8};$$

$$0,14 \cdot \frac{4S}{8} + \frac{S}{8}; 0,14 \cdot \frac{3S}{8} + \frac{S}{8}; 0,14 \cdot \frac{2S}{8} + \frac{S}{8}; 0,14 \cdot \frac{S}{8} + \frac{S}{8}.$$

Значит, общая сумма выплат (в тыс. рублей) составит

$$0,2 \cdot \left( S + \frac{7S}{8} + \frac{6S}{8} + \frac{5S}{8} \right) + 0,14 \cdot \left( \frac{4S}{8} + \frac{3S}{8} + \frac{2S}{8} + \frac{S}{8} \right) + 8 \cdot \frac{S}{8} = \\ = 0,2 \cdot \frac{13S}{4} + 0,14 \cdot \frac{5S}{4} + S = 1,825S,$$

следовательно,  $1,825S = 2190$ ;  $S = 1200$ .

Значит, сумма, взятая в кредит, равна 1200 тысяч рублей.

**Ответ:** 1200 тысяч рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

17 На стороне  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  выбрана такая точка  $M$ , что  $AM = MC$ .

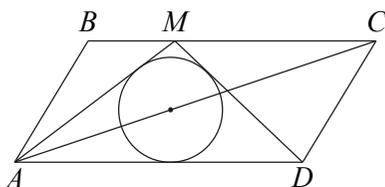
а) Докажите, что центр вписанной в треугольник  $AMD$  окружности лежит на диагонали  $AC$ .

б) Найдите радиус вписанной в треугольник  $AMD$  окружности, если  $AB = 8$ ,  $BC = 20$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ .

**Решение.**

а) Треугольник  $AMC$  равнобедренный, следовательно,  $\angle MAC = \angle MCA$ .

Прямые  $AD$  и  $BC$  параллельны, следовательно, накрест лежащие углы  $BCA$  и  $CAD$  при секущей  $AC$  равны.



Получаем, что  $\angle MAC = \angle MCA = \angle CAD$ , а значит, луч  $AC$  является биссектрисой угла  $MAD$ , на которой лежит центр вписанной в треугольник  $AMD$  окружности.

б) Обозначим  $AM = MC$  через  $x$ , тогда  $BM = 20 - x$ . По теореме косинусов в треугольнике  $ABM$  имеем

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 120^\circ; x^2 = 64 + (20 - x)^2 + 8(20 - x),$$

откуда следует, что  $x = 13$ .

По теореме косинусов в треугольнике  $CMD$ , в котором  $\angle MCD = 60^\circ$ ,

$$MD = \sqrt{MC^2 + CD^2 - MC \cdot CD} = \sqrt{129}.$$

Треугольник  $AMD$  и параллелограмм  $ABCD$  имеют общую высоту, равную расстоянию между прямыми  $AD$  и  $BC$ , и общую сторону  $AD$ , перпендикулярную этой высоте. Значит, площадь треугольника  $AMD$  равна половине площади параллелограмма  $ABCD$ :

$$S_{AMD} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD}{2} = 40\sqrt{3}.$$

С другой стороны, площадь треугольника  $AMD$  равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности. Отсюда найдём радиус  $r$  вписанной в треугольник  $AMD$  окружности:

$$r = \frac{2S_{AMD}}{AM + MD + AD} = \frac{80\sqrt{3}}{13 + \sqrt{129} + 20} = \frac{80\sqrt{3}}{33 + \sqrt{129}} = \frac{11\sqrt{3} - \sqrt{43}}{4}.$$

Ответ: б)  $\frac{11\sqrt{3} - \sqrt{43}}{4}$ .

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ . ИЛИ При обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	1
Обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$a|x - 2| + (5 - a)|x + 2| + 12 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

**Решение.**

При  $x < -2$  уравнение принимает вид  $-5x + 4a + 2 = 0$ , откуда находим  $x = \frac{4a + 2}{5}$ . Корень  $x = \frac{4a + 2}{5}$  удовлетворяет неравенству  $x < -2$  при  $\frac{4a + 2}{5} < -2$ , откуда получаем  $a < -3$ .

При  $-2 \leq x \leq 2$  уравнение принимает вид  $(5 - 2a)x + 22 = 0$ . При  $a = \frac{5}{2}$  это уравнение не имеет корней, а при  $a \neq \frac{5}{2}$  оно имеет единственный корень  $x = \frac{22}{2a - 5}$ . Корень  $x = \frac{22}{2a - 5}$  принадлежит отрезку  $[-2; 2]$  при  $-2 \leq \frac{22}{2a - 5} \leq 2$ , откуда получаем

$$\begin{cases} \frac{22}{2a-5} \geq -2, \\ \frac{22}{2a-5} \leq 2; \end{cases} \begin{cases} \frac{4a+12}{2a-5} \geq 0, \\ \frac{32-4a}{2a-5} \leq 0; \end{cases} \begin{cases} \frac{a+3}{2a-5} \geq 0, \\ \frac{a-8}{2a-5} \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение  $(5-2a)x+22=0$  имеет корень на отрезке  $[-2; 2]$  при  $a \leq -3$  и  $a \geq 8$ .

При  $x > 2$  уравнение принимает вид  $5x-4a+22=0$ , откуда находим  $x = \frac{4a-22}{5}$ .

Корень  $x = \frac{4a-22}{5}$  удовлетворяет неравенству  $x > 2$  при  $\frac{4a-22}{5} > 2$ , откуда получаем  $a > 8$ .

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при  $a < -3$  и  $a > 8$ .

**Ответ:**  $a < -3; a > 8$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающиеся от искомого только включением точек $a = -3$ и/или $a = 8$	3
Верно раскрыты модули в исходном уравнении. Задача сведена к исследованию принадлежности корней соответствующим промежуткам в зависимости от значений $a$ , и хотя бы два случая исследованы верно, при этом исследовано количество корней исходного уравнения при $a = \frac{5}{2}$ . ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно раскрыты модули в исходном уравнении, задача сведена к исследованию принадлежности корней соответствующим промежуткам в зависимости от значений $a$ , и хотя бы один из случаев исследован верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19

Сумма цифр трёхзначного числа  $A$  равна  $S$ .

а) Может ли произведение  $A \cdot S$  быть равно 1435?

б) Может ли произведение  $A \cdot S$  быть равно 1436?

в) Найдите наименьшее значение произведения  $A \cdot S$ , если известно, что оно больше 1918.

**Решение.**

а) Сумма цифр числа 205 равна 7. Таким образом, произведение этого числа и суммы его цифр равно 1435.

б) Заметим, что сумма цифр числа имеет такой же остаток при делении на 3, как и само число. Следовательно, если число  $A$  делится на 3, то  $A \cdot S$  делится на 3. Если число  $A$  не делится на 3, то  $A \cdot S$  даёт остаток 1 при делении на 3. Число 1436 даёт остаток 2 при делении на 3, значит, оно не может быть равно произведению  $A \cdot S$ .

в) Заметим, что сумма цифр числа имеет такой же остаток при делении на 9, как и само число. Следовательно,  $A \cdot S$  даёт такой же остаток при делении на 9, как и  $S^2$ . Пусть  $S = 9k + r$ , где  $0 \leq r \leq 8$ . Тогда

$$S^2 = 81k^2 + 18kr + r^2 = 9(9k^2 + 2kr) + r^2,$$

то есть остаток от деления  $S^2$  на 9 совпадает с остатком от деления  $r^2$  на 9. Этот остаток может быть равен 0; 1; 4 или 7, поскольку  $r^2$  принимает значения 0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64. Таким образом, остаток от деления произведения  $A \cdot S$  на 9 может быть равен 0; 1; 4 или 7.

Будем последовательно рассматривать числа, большие 1918, для которых остаток от деления на 9 равен 0; 1; 4 или 7.

Число 1921 даёт остаток 4 при делении на 9. Это число раскладывается в произведение простых множителей следующим образом:  $1921 = 17 \cdot 113$ , а значит, его можно представить в виде произведения трёхзначного числа на какое-то другое число только следующим способом:

$$1921 = 17 \cdot 113.$$

В этом случае первый множитель не равен сумме цифр второго множителя.

Число 1924 даёт остаток 7 при делении на 9. Это число раскладывается в произведение простых множителей следующим образом:  $1924 = 2^2 \cdot 13 \cdot 37$ , а значит, его можно представить в виде произведения трёхзначного числа на какое-то другое число следующими способами:

$$1924 = 13 \cdot 148 = 4 \cdot 481 = 2 \cdot 962.$$

Сумма цифр трёхзначного числа  $A = 148$  равна 13. Следовательно, для этого числа  $A \cdot S = 1924$ .

Таким образом, наименьшее значение произведения  $A \cdot S$ , большее 1918, равно 1924.

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 1924.

<b>Содержание критерия</b>	<b>Баллы</b>
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ , $\bar{b}$ и $v$	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте $v$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $\bar{b}$	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ и $\bar{b}$ . ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте $v$	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $\bar{b}$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>4</i>