

**Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ****11 класс**

13 декабря 2023 года

Вариант МА2310210

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО \_\_\_\_\_ класс \_\_\_\_\_

**Инструкция по выполнению работы**

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

***Желаем успеха!*****Справочные материалы**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

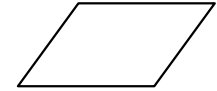
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

**Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.**

**1**

Сумма двух углов параллелограмма равна  $82^\circ$ . Найдите один из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



Ответ: \_\_\_\_\_.

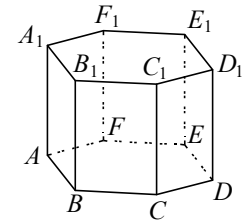
**2**

Длины векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равны  $6\sqrt{6}$  и  $5\sqrt{3}$ , а угол между ними равен  $45^\circ$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**3**

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки  $B, C, E, F, B_1, C_1, E_1, F_1$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 15.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**4**

В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 2. Результат округлите до сотых.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5**

Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 55 % этих стёкол, вторая — 45 %. Первая фабрика выпускает 4 % бракованных стёкол, а вторая — 2 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло для автомобильной фары окажется бракованным.

Ответ: \_\_\_\_\_.

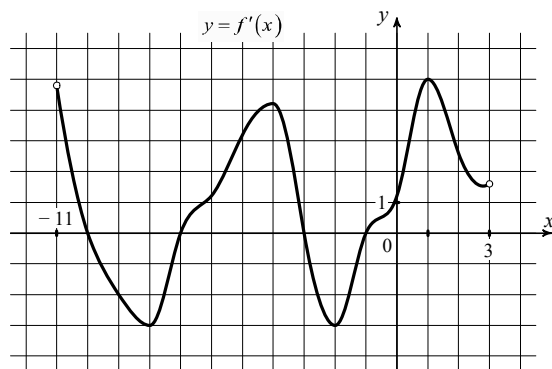
- 6 Решите уравнение  $\sqrt{2x+35} = x$ . Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 Найдите значение выражения  $\frac{21(m^6)^5 + 3(m^{10})^3}{(4m^{15})^2}$  при  $m = \frac{4}{21}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 8 На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-11; 3)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $f(x)$  параллельна прямой  $y = -x - 7$  или совпадает с ней.



Ответ: \_\_\_\_\_.

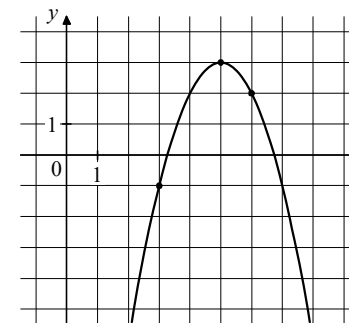
- 9 Зависимость объёма спроса  $q$  (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены  $p$  (тыс. рублей за единицу) задаётся формулой  $q = 85 - 5p$ . Выручка предприятия  $r$  (в тыс. рублей за месяц) вычисляется по формуле  $r(p) = q \cdot p$ . Определите наибольшую цену  $p$ , при которой месячная выручка  $r(p)$  составит не менее 300 тыс. рублей. Ответ дайте в тысячах рублей за единицу.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 780 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 28 км/ч, стоянка длится 4 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 60 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11 На рисунке изображён график функции  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Найдите значение  $f(-2)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 12 Найдите наименьшее значение функции  $y = 7 \cos x - 17x + 7$  на отрезке  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение  $3\sin 2x + 3\sqrt{3}\sin x + 8\cos x + 4\sqrt{3} = 0$ .  
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$ .
- 14** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 10, а боковое ребро  $SA$  равно 6. На рёбрах  $AB$  и  $SC$  отмечены точки  $L$  и  $N$  соответственно, причём  $AL:LB = SN:NC = 2:5$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $LN$  и параллельна прямой  $BC$ .  
 а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $SA$ .  
 б) Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $SBC$ .
- 15** Решите неравенство  $\frac{x^3 - 125}{|x - 5|} - x|x - 5| \geq 0$ .
- 16** В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 700 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:  
 — в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 17 % по сравнению с концом предыдущего года;  
 — в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;  
 — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;  
 — в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;  
 — к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен.  
 Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

- 17** Диагонали равнобедренной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  перпендикулярны. Окружность с диаметром  $AD$  пересекает боковую сторону  $CD$  в точке  $M$ , а окружность с диаметром  $CD$  пересекает основание  $AD$  в точке  $N$ . Отрезки  $AM$  и  $CN$  пересекаются в точке  $P$ .  
 а) Докажите, что точка  $P$  лежит на диагонали  $BD$  трапеции  $ABCD$ .  
 б) Найдите расстояние от точки  $P$  до боковой стороны  $AB$ , если  $BC = 1$ ,  $AD = 41$ .
- 18** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых неравенство  $3a(a-2) - (a-2)(2^{x+2} + 2) \leq (x^2 - 4x)(2^{x+2} + 2) - 3ax^2 + 12ax$  имеет решения на промежутке  $(1; 2]$ .
- 19** Есть четыре коробки: в первой коробке находятся 109 камней, во второй — 110, в третьей — 111, а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок, всего три камня, и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.  
 а) Могло ли в первой коробке оказаться 105 камней, во второй — 110, в третьей — 111, а в четвёртой — 4?  
 б) Могло ли в первой коробке оказаться 330 камней?  
 в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

[math100.ru](http://math100.ru)

**Ответы на тренировочные варианты 2310209-2310212 (профильный уровень) от  
13.12.2023**

|                | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>5</b> | <b>6</b> | <b>7</b> | <b>8</b> | <b>9</b> | <b>10</b> | <b>11</b> | <b>12</b> |
|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|
| <b>2310209</b> | 157      | 30       | 80       | 0,17     | 0,043    | 9        | 4,5      | 3        | 20       | 3         | - 33      | 19        |
| <b>2310210</b> | 139      | 90       | 120      | 0,03     | 0,031    | 7        | 1,5      | 4        | 12       | 2         | - 46      | 14        |
| <b>2310211</b> | 105      | - 60     | 35       | 0,5      | 0,96     | - 9      | 7        | 3        | 3000     | 18        | 11        | 40        |
| <b>2310212</b> | 125      | - 65     | 42       | 0,25     | 0,84     | - 8      | 5        | 2        | 4000     | 24        | 34        | 24        |

## Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

- а) Решите уравнение  $3\sin 2x + 3\sqrt{3}\sin x + 8\cos x + 4\sqrt{3} = 0$ .
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$ .

**Решение.**

а) Преобразуем уравнение:

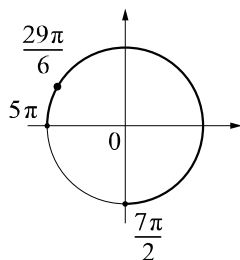
$$6\sin x \cos x + 3\sqrt{3}\sin x + 8\cos x + 4\sqrt{3} = 0;$$

$$(3\sin x + 4)(2\cos x + \sqrt{3}) = 0,$$

откуда следует, что  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  или  $\sin x = -\frac{4}{3}$ .Уравнение  $\sin x = -\frac{4}{3}$  решений не имеет, а из уравнения  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  получим

$$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

- б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$ .

Получим число  $\frac{29\pi}{6}$ .**Ответ:** а)  $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{29\pi}{6}$ .

|                                                                     |   |
|---------------------------------------------------------------------|---|
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл                                                   | 2 |

14

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 10, а боковое ребро  $SA$  равно 6. На рёбрах  $AB$  и  $SC$  отмечены точки  $L$  и  $N$  соответственно, причём  $AL:LB = SN:NC = 2:5$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $LN$  и параллельна прямой  $BC$ .

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $SA$ .
- б) Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $SBC$ .

**Решение.**

а) Пусть плоскость  $\alpha$  пересекает ребро  $SB$  в точке  $M$ . Поскольку прямая  $BC$  параллельна плоскости  $\alpha$ , прямые  $MN$  и  $BC$  параллельны, а значит,

$$SM:MB = SN:NC = AL:LB.$$

Следовательно, прямые  $LM$  и  $SA$  параллельны. Таким образом, плоскость  $\alpha$ , содержащая прямую  $LM$ , параллельна прямой  $SA$ .

б) Пусть точка  $H$  — середина ребра  $BC$ . Тогда медианы  $AH$  и  $SH$  треугольников  $ABC$  и  $SBC$  соответственно являются их высотами, а значит, плоскость  $ASH$  перпендикулярна прямой  $BC$ .

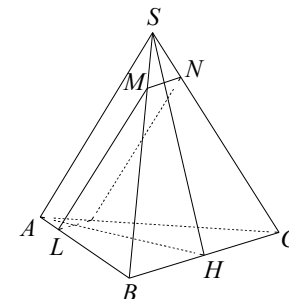
Следовательно, плоскость  $ASH$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ , параллельной прямой  $BC$ , и плоскости  $SBC$ , содержащей прямую  $BC$ . Значит, искомый угол равен углу между прямой  $l$ , по которой пересекаются плоскости  $\alpha$  и  $ASH$ , и прямой  $SH$ . Так как прямая  $l$  параллельна прямой  $AS$ , этот угол равен углу  $ASH$  или смежному с ним.

В треугольнике  $ASH$  имеем:

$$AS = 6, AH = 5\sqrt{3}, SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{SB^2 - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{11}.$$

По теореме косинусов

$$\cos \angle ASH = \frac{SA^2 + SH^2 - AH^2}{2 \cdot SA \cdot SH} = \frac{36 + 11 - 75}{2 \cdot 6 \cdot \sqrt{11}} = -\frac{7\sqrt{11}}{33}.$$

**Ответ:** б)  $\arccos \frac{7\sqrt{11}}{33}$ .

| Содержание критерия                                                                                                                                                                                 | Баллы |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$                                                                                              | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте $b$ .<br>ИЛИ<br>Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ .<br>ИЛИ<br>При обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.                                            | 1     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен                                                                              |       |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                   | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                                                                                                                                                            | 3     |

15

Решите неравенство  $\frac{x^3 - 125}{|x - 5|} - x|x - 5| \geq 0$ .

**Решение.**

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\frac{x^3 - 125 - x(x - 5)^2}{|x - 5|} \geq 0; \quad \frac{(x - 5)(x^2 + 5x + 25 - x^2 + 5x)}{|x - 5|} \geq 0;$$

$$\frac{5(x - 5)(2x + 5)}{|x - 5|} \geq 0.$$

Отсюда получаем, что  $x \leq -2,5$  или  $x > 5$ .

**Ответ:**  $(-\infty; -2,5], (5; +\infty)$ .

| Содержание критерия                                                                                                                                                                                          | Баллы |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                                                                                                             | 2     |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $-2,5$ .<br>ИЛИ<br>Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                          | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                                                                                                                                                                     | 2     |

16

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 700 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 17 % по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

**Решение.**

По условию долг перед банком (в тысячах рублей) по состоянию на июль 2025–2035 годов должен уменьшаться до нуля следующим образом:

700; 630; 560; 490; 420; 350; 280; 210; 140; 70; 0.

В январе каждого года с 2026 по 2030 долг возрастает на 17 %, а в январе каждого года с 2031 по 2035 — на 14 %, значит, последовательность размеров долга (в тысячах рублей) в январе 2026–2035 годов такова:

819; 737,1; 655,2; 573,3; 491,4; 399; 319,2; 239,4; 159,6; 79,8.

Таким образом, выплаты (в тысячах рублей) должны быть следующими:

189; 177,1; 165,2; 153,3; 141,4; 119; 109,2; 99,4; 89,6; 79,8.

Значит, общая сумма выплат (в тысячах рублей) составит

$189 + 177,1 + 165,2 + 153,3 + 141,4 + 119 + 109,2 + 99,4 + 89,6 + 79,8 = 1323$ .

**Ответ:** 1,323 млн рублей.

| Содержание критерия                                                 | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                    | 2     |
| Верно построена математическая модель                               | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                            | 2     |

17

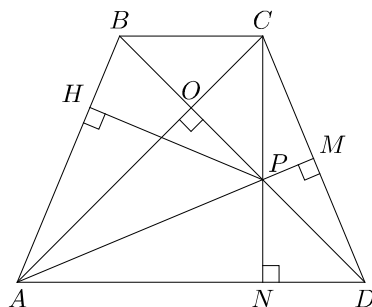
Диагонали равнобедренной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  перпендикулярны. Окружность с диаметром  $AD$  пересекает боковую сторону  $CD$  в точке  $M$ , а окружность с диаметром  $CD$  пересекает основание  $AD$  в точке  $N$ . Отрезки  $AM$  и  $CN$  пересекаются в точке  $P$ .

а) Докажите, что точка  $P$  лежит на диагонали  $BD$  трапеции  $ABCD$ .

б) Найдите расстояние от точки  $P$  до боковой стороны  $AB$ , если  $BC = 1$ ,  $AD = 41$ .

**Решение.**

а) Точка  $M$  лежит на окружности с диаметром  $AD$ , поэтому прямая  $AM$  перпендикулярна прямой  $CD$ , т. е.  $AM$  — высота треугольника  $ACD$ . Аналогично  $CN$  — высота треугольника  $ACD$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей трапеции. По условию задачи прямая  $DO$  перпендикулярна прямой  $AC$ , значит,  $DO$  — третья высота треугольника  $ACD$ . Высоты треугольника пересекаются в одной точке, следовательно, точка  $P$  пересечения высот  $AM$  и  $CN$  лежит на прямой  $OD$ , а значит, на диагонали  $BD$ .



б) Точка  $N$  — основание высоты трапеции, опущенной на основание  $AD$ , поэтому

$$DN = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(41 - 1) = 20, \quad AN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(41 + 1) = 21.$$

Трапеция равнобедренная, а её диагонали перпендикулярны, поэтому  $\angle CAD = \angle ADB = 45^\circ$ .

$$\text{Значит, } BP = BC\sqrt{2} = \sqrt{2}, \quad AO = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{41}{\sqrt{2}}, \quad CN = AN = 21.$$

$$\text{По теореме Пифагора } AB = CD = \sqrt{DN^2 + CN^2} = \sqrt{21^2 + 20^2} = 29.$$

Расстояние от точки  $P$  до боковой стороны  $AB$  равно высоте  $PH$  треугольника  $APB$ , опущенной на сторону  $AB$ , а так как  $AO$  также высота этого треугольника, получаем, что  $AB \cdot PH = BP \cdot AO$ .

$$\text{Следовательно, } PH = \frac{BP \cdot AO}{AB} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{41}{\sqrt{2}}}{29} = \frac{41}{29} = 1\frac{12}{29}.$$

**Ответ:** б)  $1\frac{12}{29}$ .

| Содержание критерия                                                                                                                                                                                 | Баллы |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$                                                                                              | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте $b$ .<br>ИЛИ<br>Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2     |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                           |   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ .<br>ИЛИ<br>При обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.<br>ИЛИ<br>Обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                         | 0 |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                         | 3 |

**18**

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$3a(a-2) - (a-2)(2^{x+2} + 2) \leq (x^2 - 4x)(2^{x+2} + 2) - 3ax^2 + 12ax$$

имеет решения на промежутке  $(1; 2]$ .

**Решение.**

Рассмотрим неравенство как квадратное относительно  $a$ .

$$3a(a-2) - (a-2)(2^{x+2} + 2) - (x^2 - 4x)(2^{x+2} + 2) + 3ax^2 - 12ax \leq 0;$$

$$(3a - 2^{x+2} - 2)(a + x^2 - 4x - 2) \leq 0.$$

Изобразим графики функций  $a = \frac{4}{3} \cdot 2^x + \frac{2}{3}$

и  $a = -x^2 + 4x + 2$  на плоскости  $xOa$ .

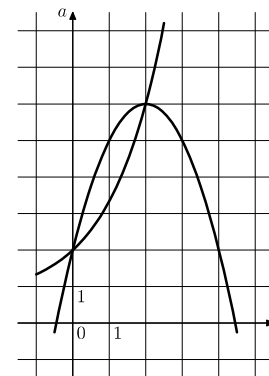
Общие точки графиков —  $(0; 2)$  и  $(2; 6)$ , что можно проверить подстановкой их координат в уравнения  $a = \frac{4}{3} \cdot 2^x + \frac{2}{3}$  и  $a = -x^2 + 4x + 2$ .

Больше двух точек быть не может в силу противоположной выпуклости данных кривых.

На промежутке  $(1; 2]$  решения неравенства есть

тогда и только тогда, когда  $\frac{10}{3} < a \leq 6$ .

**Ответ:**  $\frac{10}{3} < a \leq 6$ .



| Содержание критерия                                                                                                                                                                                                  | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                                                                                                                     | 4     |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только включением точки $a = \frac{10}{3}$                                                                                  | 3     |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $2 \leq a \leq 6$ , возможно, не включая концы.<br>ИЛИ<br>Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения | 2     |
| Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения                                                                                                                                             | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                                  | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                    | 4     |

- 19 Есть четыре коробки: в первой коробке находятся 109 камней, во второй — 110, в третьей — 111, а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок, всего три камня, и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.
- а) Могло ли в первой коробке оказаться 105 камней, во второй — 110, в третьей — 111, а в четвёртой — 4?
- б) Могло ли в первой коробке оказаться 330 камней?
- в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

### Решение.

а) Пусть 2 раза из первых трёх коробок переложили камни в четвёртую. Тогда в первой коробке оказалось 107 камней, во второй — 108 камней, в третьей — 109 камней, а в четвёртой — 6 камней. Если после этого переложить камни из первой, третьей и четвёртой коробок во вторую, то в первой коробке окажется 106 камней, во второй — 111, в третьей — 108, а в четвёртой — 5. Если после этого переложить камни из первой, второй и четвёртой коробок в третью, то в первой коробке окажется 105 камней, во второй — 110, в третьей — 111, а в четвёртой — 4.

б) Если в первой коробке оказалось 330 камней, то во второй, в третьей и в четвёртой коробках не осталось камней.

Пусть в какой-то момент в коробках оказалось  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  камней соответственно. Тогда после одного хода в коробках могло оказаться либо  $a-1$ ,  $b-1$ ,  $c-1$  и  $d+3$  камня, либо  $a-1$ ,  $b-1$ ,  $c+3$  и  $d-1$  камень, либо  $a-1$ ,  $b+3$ ,  $c-1$  и  $d-1$  камень, либо  $a+3$ ,  $b-1$ ,  $c-1$  и  $d-1$  камень соответственно. Заметим, что разность между количествами камней во второй и в третьей коробках либо не изменилась, либо изменилась на 4.

Сначала разность количеств камней во второй и в третьей коробках равнялась 1. Следовательно, ни в какой момент она не могла стать равной 0. Значит, в этих двух коробках всегда разное число камней. Следовательно, в первой коробке не могло оказаться 330 камней.

в) Сначала разность количеств камней в любых двух коробках не делится на 4. Следовательно, ни в какой момент в двух коробках не могло оказаться одинаковое число камней. Значит, во второй, в третьей и в четвёртой коробках не меньше  $0+1+2=3$  камней суммарно, а в первой коробке не больше 327 камней.

Покажем, что в первой коробке могло оказаться 327 камней. Пусть 28 раз из первых трёх коробок переложили камни в четвёртую. Тогда в первой коробке оказался 81 камень, во второй — 82, в третьей — 83, а в четвёртой — 84. Если после этого 82 раза переложить камни из второй, третьей и четвёртой коробок в первую, то в первой коробке окажется 327 камней, во второй — 0 камней, в третьей — 1 камень, а в четвёртой — 2 камня.

Ответ: а) да; б) нет; в) 327.

| Содержание критерия                                                                                              | Баллы |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ , $b$ и $в$                                                     | 4     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте $в$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $b$          | 3     |
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ и $b$ .<br>ИЛИ<br>Обоснованно получен верный ответ в пункте $в$ | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $b$                                                            | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                              | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                | 4     |