Тренировочная работа №5 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

24 апреля 2024 года

Вариант МА2310512

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

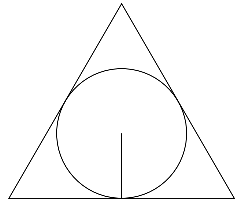
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

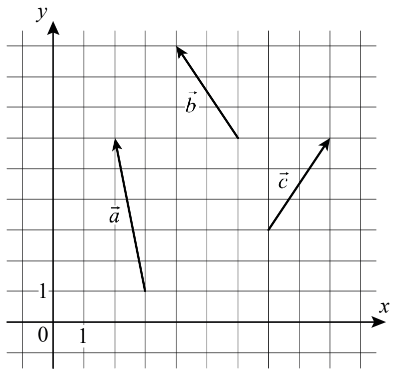
Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 26. Найдите высоту этого треугольника.



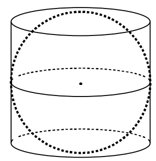
Ответ: ___________________________.

2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{b}$.



Ответ: ___________________________.

3 Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 78. Найдите площадь поверхности шара.



Ответ: ___________________________.

4 В классе 6 учащихся, среди них два друга — Олег и Вадим. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Олег и Вадим окажутся в одной группе.

Ответ: ___________________________.

5 В коробке 8 синих, 6 красных и 11 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Ответ: ___________________________.

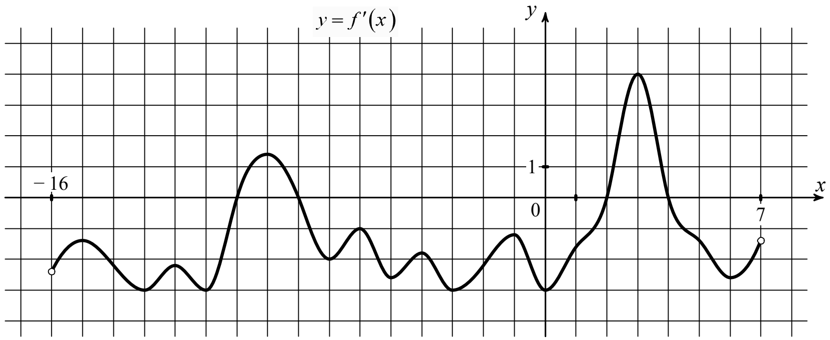
6 Найдите корень уравнения $\log_4(x+3)=\log_4(1-4x)+2$.

Ответ: ___________________________.

7 Найдите значение выражения $\dfrac{(5x)^3\cdot x^2}{x^4\cdot 5x}$ при $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Ответ: ___________________________.

8 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-16;7)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-11;5]$.



Ответ: ___________________________.

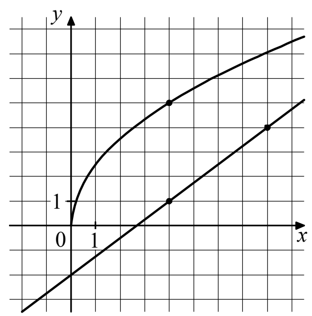
9 При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0=120$ Гц и определяется следующим выражением: $f=f_0\dfrac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u=6$ м/с и $v=7$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 125 Гц?

Ответ: ___________________________.

10 Расстояние между городами A и B равно 325 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 1 час следом за ним со скоростью 120 км/ч выехал мотоциклист, который догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C. Ответ дайте в километрах.

Ответ: ___________________________.

11 На рисунке изображены графики функций $f(x)=a\sqrt{x}$ и $g(x)=kx+b$, которые пересекаются в точке A. Найдите ординату точки A.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=x^3-27x+19$ на отрезке $[0;4]$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$6\sin^2 x+13\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-8=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

14 Диагонали BE и DF основания $ABCDEF$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ пересекаются в точке P, а диагонали FE_1 и EF_1 боковой грани EFF_1E_1 пересекаются в точке Q.

а) Докажите, что прямая QP параллельна плоскости CB_1E_1.

б) Найдите расстояние между прямой QP и плоскостью CB_1E_1, если сторона основания призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равна $2\sqrt{7}$, а её высота равна $\sqrt{7}$.

15 Решите неравенство $\left(\log_2^2 x-3\log_2 x\right)^2+42\log_2 x+40<14\log_2^2 x$.

16 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 760 тысяч рублей?

17 В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведена высота CH. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно, CD — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $\angle MDN=\angle CAB+\angle ABC$.

б) Найдите длину отрезка MN, если $AB=3\sqrt{5}$, $CM:MA=9:41$ и $CN:NB=9:1$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x^2+12ax+4}=x^2+3ax+2$$

имеет ровно три различных корня.

19 На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: $1+1+111+11+11+1=136$.

а) Можно ли получить сумму 128, если $n=47$?

б) Можно ли получить сумму 129, если $n=47$?

в) Какую наибольшую четырёхзначную сумму можно получить, если $n=47$?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2310509-2310512 (профильный уровень) от 24.04.2024

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2310509	15	10	96	0,2	0,15	15	4,5	1	494	22	64	443
2310510	16	7	24	0,1	0,1	8	0,5	2	453	20	16	705
2310511	54	- 8	64	0,25	0,22	2,4	32	3	274	325	6	- 11
2310512	78	12	52	0,4	0,16	0,2	25	2	319	200	10	- 35

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение

$$6\sin^2 x + 13\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 8 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение.

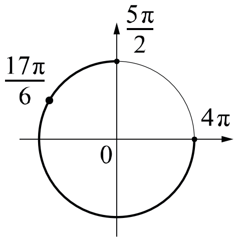
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$6\sin^2 x + 13\sin x - 8 = 0; \quad (2\sin x - 1)(3\sin x + 8) = 0.$$

Значит, $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in Z$.

Уравнение $\sin x = -\frac{8}{3}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.



Получим число $\frac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in Z$; б) $\frac{17\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

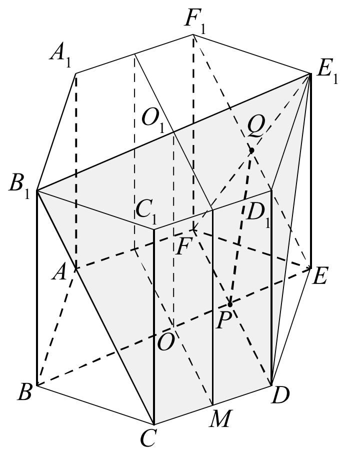
14 Диагонали BE и DF основания $ABCDEF$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ пересекаются в точке P, а диагонали FE_1 и EF_1 боковой грани EFF_1E_1 пересекаются в точке Q.

а) Докажите, что прямая QP параллельна плоскости CB_1E_1.

б) Найдите расстояние между прямой QP и плоскостью CB_1E_1, если сторона основания призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равна $2\sqrt{7}$, а её высота равна $\sqrt{7}$.

Решение.

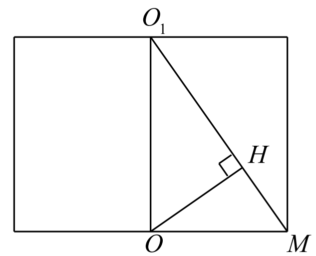
а) Диагональ BE является осью симметрии правильного шестиугольника $ABCDEF$, поэтому точка P — середина отрезка FD. Так как четырёхугольник EFF_1E_1 — прямоугольник, точка Q — середина отрезка FE_1, поэтому отрезок QP параллелен отрезку DE_1 как средняя линия треугольника FDE_1.



Отрезки B_1E_1, C_1D_1 и CD параллельны, поэтому прямая CD лежит в плоскости CB_1E_1. Прямая QP параллельна прямой DE_1, лежащей в плоскости CB_1E_1, следовательно, прямая QP параллельна плоскости CB_1E_1.

б) Прямая QP параллельна плоскости CB_1E_1, следовательно, расстояние от прямой до плоскости равно расстоянию от точки P до плоскости CB_1E_1.

Поскольку прямая BE параллельна плоскости CB_1E_1, расстояние от точки P до плоскости CB_1E_1 равно расстоянию от точки O — центра основания $ABCDEF$ — до плоскости CB_1E_1.



Рассмотрим плоскость осевого сечения призмы, проходящего через центры O и O_1 оснований и середину M ребра CD. Эта плоскость перпендикулярна прямой CD, а поэтому перпендикулярна и плоскости CB_1E_1.

Искомое расстояние равно длине высоты OH прямоугольного треугольника OO_1M, в котором $OM=\dfrac{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{2}=\sqrt{21}$, $OO_1=\sqrt{7}$, $O_1M=2\sqrt{7}$:

$$OH=\frac{OO_1\cdot OM}{O_1M}=\frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Ответ: б) $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

15 Решите неравенство $\left(\log_2^2 x-3\log_2 x\right)^2+42\log_2 x+40<14\log_2^2 x$.

Решение.

Пусть $t=\log_2 x$, тогда неравенство примет вид:

$$\left(t^2-3t\right)^2-14\left(t^2-3t\right)+40<0;\ \left(t^2-3t-4\right)\left(t^2-3t-10\right)<0;$$

$$(t-4)(t+1)(t-5)(t+2)<0,$$

откуда $-2<t<-1$; $4<t<5$.

При $-2<t<-1$ получим: $-2<\log_2 x<-1$, откуда $\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2}$.

При $4<t<5$ получим: $4<\log_2 x<5$, откуда $16<x<32$.

Решение исходного неравенства: $\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2}$; $16<x<32$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$; $(16;32)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением граничных точек. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 760 тысяч рублей?

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$4,\ \frac{4(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{4\cdot 2}{n},\ \frac{4}{n},\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 14 %, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$4{,}56,\ \frac{4{,}56(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{4{,}56\cdot 2}{n},\ \frac{4{,}56}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$0{,}56+\frac{4}{n},\ \frac{0{,}56(n-1)+4}{n},\ \ldots,\ \frac{0{,}56\cdot 2+4}{n},\ \frac{0{,}56+4}{n}.$$

Получаем: $\frac{4,56}{n}=0,76$, откуда $n=6$. Значит, всего следует выплатить

$$4+0,56\left(1+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)=4+0,56\cdot\frac{7}{2}=5,96 \text{ (млн рублей).}$$

Ответ: 5,96 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

17 В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведена высота CH. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно, CD — диаметр этой окружности.

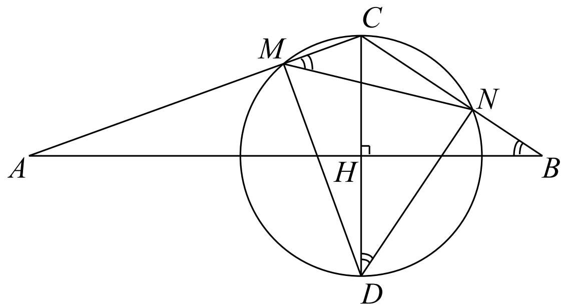
а) Докажите, что $\angle MDN=\angle CAB+\angle ABC$.

б) Найдите длину отрезка MN, если $AB=3\sqrt{5}$, $CM:MA=9:41$ и $CN:NB=9:1$.

Решение.

а) Четырёхугольник $CMDN$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle MDN=180°-\angle MCN=180°-\angle ACB=\angle CAB+\angle CBA.$$



б) Вписанные углы CMN и CDN опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle CMN=\angle CDN$. Вписанный угол CND опирается на диаметр CD, следовательно, угол CND прямой.

У прямоугольных треугольников CND и CHB общий острый угол при вершине C, поэтому $\angle CBH=\angle CDN=\angle CMN$.

Треугольник ABC подобен треугольнику NMC по двум углам, значит, $\frac{CN}{AC}=\frac{CM}{BC}$.

Положим:

$$CN=9a,\ NB=a,\ MA=41b,\ CM=9b,$$

тогда $\frac{9a}{50b}=\frac{9b}{10a}$, откуда $\frac{a}{b}=\sqrt{5}$. Значит, коэффициент подобия треугольников ABC и NMC равен

$$\frac{CN}{AC}=\frac{9a}{50b}=\frac{9}{50}\cdot\frac{a}{b}=\frac{9\sqrt{5}}{50}.$$

Следовательно, $\frac{MN}{AB}=\frac{CN}{AC}=\frac{9\sqrt{5}}{50}$, тогда $MN=\frac{9\sqrt{5}}{50}AB=\frac{27}{10}=2,7$.

Ответ: б) 2,7.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x^2+12ax+4}=x^2+3ax+2$$

имеет ровно три различных корня.

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению $5x^2+12ax+4=\left(x^2+3ax+2\right)^2$ при условии $x^2+3ax+2\ge 0$.

Решим уравнение $5x^2+12ax+4=\left(x^2+3ax+2\right)^2$:

$$5x^2+12ax+4=x^4+6ax^3+\left(9a^2+4\right)x^2+12ax+4;$$

$$x^4+6ax^3+\left(9a^2-1\right)x^2=0;\ x^2\left(x+3a+1\right)\left(x+3a-1\right)=0,$$

откуда $x=0$, $x=1-3a$ или $x=-1-3a$.

Исходное уравнение имеет три корня, когда эти числа различны и для каждого из них выполнено условие $x^2+3ax+2\ge 0$.

Рассмотрим условия совпадения корней. При $a=\frac{1}{3}$ имеем $1-3a=0$. При $a=-\frac{1}{3}$ имеем $-1-3a=0$. При остальных значениях a числа 0, $1-3a$, $-1-3a$ различны.

При $x=0$ получаем: $x^2+3ax+2=2\ge 0$ при всех значениях a.

При $x=1-3a$ получаем:

$$x^2+3ax+2=\left(1-3a\right)^2+3a\left(1-3a\right)+2=3-3a.$$

Это выражение неотрицательно при $a\le 1$.

При $x=-1-3a$ получаем:

$$x^2+3ax+2=\left(-1-3a\right)^2+3a\left(-1-3a\right)+2=3a+3.$$

Это выражение неотрицательно при $a\ge -1$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три различных корня при

$$-1\le a<-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3}<a<\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}<a\le 1.$$

Ответ: $-1\le a<-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}<a<\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}<a\le 1$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точек $a=-1$ и/или $a=1$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $\left(-1;1\right)$ множества значений a, возможно, с включением граничных точек	2
Получены корни уравнения $5x^2+12ax+4=\left(x^2+3ax+2\right)^2$: $x=0$, $x=1-3a$, $x=-1-3a$; и задача верно сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2+3ax+2>0$ ($x^2+3ax+2\ge 0$). ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

19 На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: $1+1+111+11+11+1=136$.

а) Можно ли получить сумму 128, если $n=47$?

б) Можно ли получить сумму 129, если $n=47$?

в) Какую наибольшую четырёхзначную сумму можно получить, если $n=47$?

Решение.

а) Пусть плюсы расставлены так, что суммируется девять чисел 11 и 29 единиц. Тогда сумма равна $9\cdot 11+29\cdot 1=128$.

б) Пусть в полученной сумме в разряде единиц в слагаемых стоит a_1 единиц, в разряде десятков — a_2 единиц, в разряде сотен — a_3 единиц и так далее. Тогда полученная сумма равна

$$a_1+10a_2+100a_3+\ldots=3\left(3a_2+33a_3+\ldots\right)+\left(a_1+a_2+a_3+\ldots\right)=3A+47.$$

Таким образом, полученная сумма не делится на 3, а 129 делится на 3. Значит, невозможно получить сумму 129 при $n=47$.

в) Если среди слагаемых в сумме присутствуют числа, бо́льшие 1111, то сумма будет больше 10 000. Значит, каждое из слагаемых равно 1, 11, 111 или 1111. Пусть таких слагаемых a, b, c и d соответственно. Тогда $n=a+2b+3c+4d=47$, а сумма равна $a+11b+111c+1111d$.

При $d\ge 9$ сумма больше 10 000. Найдём наибольшую возможную сумму при $d\le 8$. Заметим, что при замене четвёрки чисел $\left(a;b;c;d\right)$ на четвёрку

$(a-2; b+1; c; d)$, $(a+1; b-2; c+1; d)$ или $(a; b+1; c-2; d+1)$ количество единиц останется неизменным, а сумма увеличится. Значит, если бы наибольшая сумма достигалась при $d \le 7$, то выполнялись бы неравенства $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$, $0 \le c \le 1$. Следовательно, $n = a + 2b + 3c + 4d \le 34$, что противоречит условию.

Таким образом, наибольшая сумма достигается при $d = 8$. При этом $0 \le a \le 1$ и $0 \le b \le 1$. Поскольку $c = \frac{47 - 4d - 2b - a}{3} = \frac{15 - 2b - a}{3}$, получаем $4 \le c \le 5$, то есть либо $c = 4$, откуда $a + 2b = 3$, и $a = b = 1$; либо $c = 5$, откуда $a + 2b = 0$, и $a = b = 0$. В первом случае $a + 11b + 111c = 456$, а во втором $a + 11b + 111c = 555$.

Следовательно, наибольшая сумма достигается при $a = b = 0$, $c = 5$ и $d = 8$ и равна $0 + 0 \cdot 11 + 5 \cdot 111 + 8 \cdot 1111 = 9443$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 9443.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*