Тренировочная работа №1 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
30 сентября 2020 года
Вариант МА2010111
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

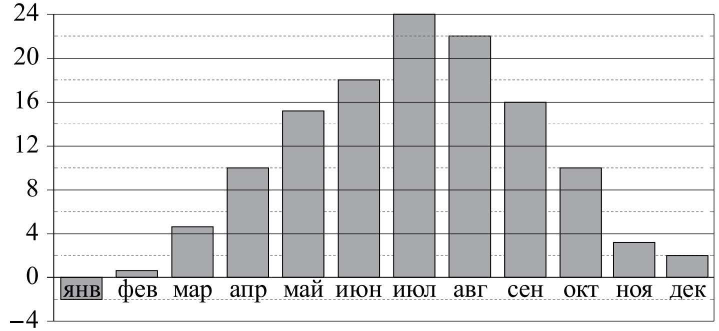
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Шариковая ручка стоит 20 рублей. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 300 рублей после повышения цены на 25 %?

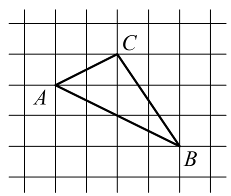
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1988 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его медианы, проведённой из вершины C.



Ответ: ___________________________.

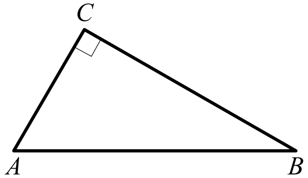
4 В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,02 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{5}{6x-7}}=\dfrac{1}{11}$.

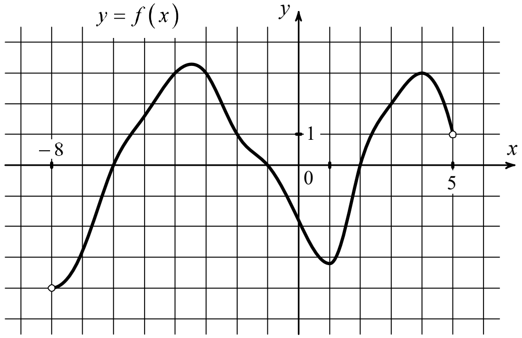
Ответ: ____________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC=2$, $BC=\sqrt{21}$. Найдите $\cos A$.



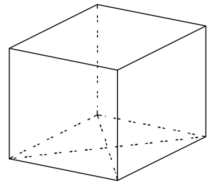
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-8;5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Ответ: ____________________________.

8 Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 5 и 12, а боковое ребро равно 16.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $14^{-5,2}\cdot 7^{7,2}:2^{-6,2}$.

Ответ: ____________________________.

10 После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h=5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 1,5 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ дайте в метрах.

Ответ: ____________________________.

11 На изготовление 80 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 90 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=12+12x-2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[4;52]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=\cos^2 3x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

14 В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$ и $BC=\sqrt{33}$, все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на рёбрах AM и AB — точки F и G соответственно так, что $MF=BE=BG=3$.
а) Докажите, что плоскость GEF проходит через точку C.
б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость GEF пересекает грань CMD пирамиды.

15 Решите неравенство $3^{x+3}-x^3\cdot 3^x\le 81-3x^3$.

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём диаметром окружности является его диагональ AC. Также известно, что в $ABCD$ можно вписать окружность.
а) Докажите, что отрезки AC и BD перпендикулярны.
б) Найдите радиус вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$, если $AC=26$ и $BD=24$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.
На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 1,25 млн руб.?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left((x-1)^2+(y-4)^2\right)\left((x-4)^2+(y-16)^2\right)\le 0,\\ (x-a-1)^2+(y-2a-2)^2\le 4(a+1)^2\end{cases}$$

не имеет решений.

19 а) Может ли десятичная запись произведения трёх последовательных трёхзначных чисел оканчиваться на 250?
б) Может ли десятичная запись произведения трёх последовательных трёхзначных чисел оканчиваться на 8750?
в) Найдите все такие натуральные числа n, что каждое из чисел n, $n+1$ и $n+2$ трёхзначное, а десятичная запись их произведения $n(n+1)(n+2)$ оканчивается на 4000.

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2010109-2010112 (профильный уровень) от 30.09.2020

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2010109	8	9	3	0,15	- 9	0,5	5	108	0,2	6000	31	6
2010110	12	21	4	0,168	- 3	0,6	7	540	12,5	8000	30	- 95
2010111	12	- 2	2	0,9996	102	0,4	6	476	98	2,8	9	76
2010112	40	- 8	4	0,9879	85	0,3	2	1072	25	1,2	8	16

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=\cos^2 3x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

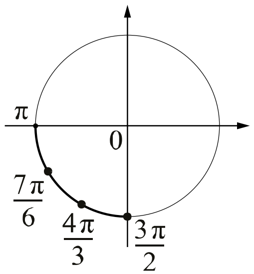
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$\cos\left(\frac{7x}{2}-\frac{x}{2}\right)=\cos^2 3x;\quad \cos^2 3x-\cos 3x=0;\quad \cos 3x(\cos 3x-1)=0.$$

Следовательно, $\cos 3x=0$ или $\cos 3x=1$, а значит, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$ или $x=\frac{2\pi}{3}k$, $n,k\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $\frac{7\pi}{6};\ \frac{4\pi}{3};\ \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$, $\frac{2\pi}{3}k$, $n,k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6};\ \frac{4\pi}{3};\ \frac{3\pi}{2}$.

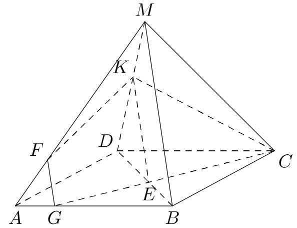
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$ и $BC=\sqrt{33}$, все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на рёбрах AM и AB — точки F и G соответственно так, что $MF=BE=BG=3$.

а) Докажите, что плоскость GEF проходит через точку C.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость GEF пересекает грань CMD пирамиды.

Решение.



а) По теореме Пифагора $BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{33+16}=7$, поэтому $DE=7-BE=4$. Пусть прямая CE пересекает ребро AB в точке G_1. Тогда треугольники BG_1E и DCE подобны, поэтому $\frac{BG_1}{DC}=\frac{BE}{DE}=\frac{3}{4}$, а значит, $BG_1=3$ и $AG_1=1$. Отрезки BG_1 и BG равны, следовательно, точка G_1 совпадает с точкой G. Таким образом, точка G лежит на прямой EC, а значит, плоскость GEF проходит через точку C.

б) Поскольку $MA=MB=AB=4$ и $MF=BG=3$, отрезок FG параллелен отрезку MB. Пусть плоскость GEF пересекает отрезок MD в точке K. Так как прямая FG параллельна MB, по признаку параллельности прямой и плоскости FG параллельна плоскости MBD. Плоскость MBD и секущая плоскость пересекаются по прямой KE, и по свойству параллельных прямой и плоскости прямая KE параллельна FG и, следовательно, параллельна MB. Треугольники DKE и DMB подобны, поэтому $\frac{DK}{KM}=\frac{DE}{EB}=\frac{4}{3}$.

Тогда $MK=\frac{12}{7}$ и $DK=\frac{16}{7}$. Плоскость GEF пересекает грань CMD по отрезку CK. Угол CMK равен $60°$, так как $MC=MD=CD=4$.

По теореме косинусов для треугольника CMK получаем

$$CK^2=CM^2+MK^2-2\cdot CM\cdot MK\cdot\cos\angle CMK.$$

Следовательно, $CK=\frac{4\sqrt{37}}{7}$.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{37}}{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $3^{x+3}-x^3\cdot 3^x\le 81-3x^3$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$3^x\cdot 27-81-x^3\cdot 3^x+3x^3\le 0;\quad 27\left(3^x-3\right)-x^3\left(3^x-3\right)\le 0;$$

$$\left(3^x-3\right)\left(27-x^3\right)\le 0;$$

$$\left(3^x-3\right)\left(3-x\right)\left(9+3x+x^2\right)\le 0,\text{ то есть } x\ge 3 \text{ или } x\le 1.$$

Ответ: $(-\infty;1]$; $[3;+\infty)$.

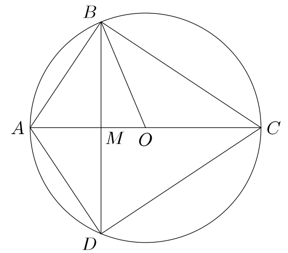
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём диаметром окружности является его диагональ AC. Также известно, что в $ABCD$ можно вписать окружность.

а) Докажите, что отрезки AC и BD перпендикулярны.

б) Найдите радиус вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$, если $AC=26$ и $BD=24$.

Решение.



а) Пусть BD и AC пересекаются в точке M. Так как $ABCD$ — описанный четырёхугольник, $AB+CD=BC+AD=s$. Будем считать, что $AB=x$, $BC=y$, $CD=s-x$ и $AD=s-y$. Углы ABC и ADC прямые, так как AC — диаметр. По теореме Пифагора получаем $AC^2=x^2+y^2$ и $AC^2=(s-x)^2+(s-y)^2$. Отсюда следует, что $x+y=s$, то есть $AB=AD$ и $BC=DC$. Это значит, что треугольники ABC и ADC равны по третьему признаку равенства треугольников, поэтому $\angle ACB=\angle ACD$. Следовательно, CM — биссектриса треугольника DBC, а также его высота и медиана.

б) Пусть O — центр окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$. Тогда её радиус $OB=\frac{1}{2}AC=13$, поэтому $OM=\sqrt{OB^2-BM^2}=5$. Допустим, что $AM<MC$, тогда $AM=8$ и $MC=18$. Рассматривая прямоугольные треугольники AMB и ABC, можем записать $\cos\angle BAM=\frac{AM}{AB}=\frac{AB}{AC}$, следовательно, $AB=\sqrt{AM\cdot AC}=4\sqrt{13}$. Аналогично $BC=6\sqrt{13}$, поэтому полупериметр четырёхугольника $ABCD$ равен $10\sqrt{13}$. Площадь же четырёхугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD=312$. Искомый радиус вписанной окружности равен $\frac{312}{10\sqrt{13}}=\frac{12\sqrt{13}}{5}$.

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{13}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.
На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 1,25 млн руб.?

Решение.
Пусть кредит взят на n лет. По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$4,\ \frac{4(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{4\cdot 2}{n},\ \frac{4}{n},\ 0.$$

По условию каждый январь долг возрастает на 15 %. Значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$4{,}6,\quad \frac{4{,}6(n-1)}{n},\quad \ldots,\quad \frac{4{,}6\cdot 2}{n},\quad \frac{4{,}6}{n}.$$

Следовательно, наибольшая выплата составляет $0{,}6+\frac{4}{n}$. Получаем $0{,}6+\frac{4}{n}\le 1{,}25$, а значит, $n\ge 7$.

Ответ: 7.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2

Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left((x-1)^2+(y-4)^2\right)\left((x-4)^2+(y-16)^2\right)\le 0,\\ (x-a-1)^2+(y-2a-2)^2\le 4(a+1)^2\end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.
Первое неравенство имеет ровно два решения: $(1;4)$, $(4;16)$. Следовательно, данная система не имеет решения тогда и только тогда, когда второму неравенству системы не удовлетворяет ни одно из решений первого неравенства.
Найдём все значения a, при каждом из которых справедлива система неравенств

$$\begin{cases}(1-a-1)^2+(4-2a-2)^2>4(a+1)^2,\\ (4-a-1)^2+(16-2a-2)^2>4(a+1)^2.\end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases}a^2+4-8a+4a^2>4a^2+8a+4,\\ 9-6a+a^2+196-56a+4a^2>4a^2+8a+4;\end{cases}\qquad \begin{cases}a(a-16)>0,\\ (a-3)(a-67)>0.\end{cases}$$

Получаем $a<0$ или $a>67$.
Ответ: $(-\infty;0)$; $(67;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение $a=0$ или $a=67$	3
Задача верно сведена к исследованию возможного решения второго неравенства при $x=1$; $y=4$ или $x=4$; $y=16$, но верный ответ отсутствует	2
С помощью верного рассуждения получены все решения первого неравенства, дальнейшее решение отсутствует	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 а) Может ли десятичная запись произведения трёх последовательных трёхзначных чисел оканчиваться на 250?

б) Может ли десятичная запись произведения трёх последовательных трёхзначных чисел оканчиваться на 8750?

в) Найдите все такие натуральные числа n, что каждое из чисел n, $n+1$ и $n+2$ трёхзначное, а десятичная запись их произведения $n(n+1)(n+2)$ оканчивается на 4000.

Решение.

а) Да. Имеем

$$125\cdot126\cdot127=125\cdot(8\cdot16-2)\cdot(8\cdot16-1)=1000\cdot(8\cdot16^2-3\cdot16)+250.$$

Значит, десятичная запись этого произведения оканчивается на 250.

б) Нет. Предположим, что десятичная запись произведения $p=n(n+1)(n+2)$ некоторых трёхзначных чисел n, $n+1$ и $n+2$ оканчивается на 8750. Тогда для некоторого натурального числа k имеем $p=k\cdot10^4+8750=2\cdot5^4\cdot(8k+7)$. Поскольку из чисел n, $n+1$ и $n+2$ только одно может делиться на 5, именно это число должно делиться и на $5^4=625$. Есть лишь одно такое трёхзначное число — это 625. Значит, либо $n=623$, либо $n=624$, либо $n=625$. В первых двух случаях p делится на 4, что противоречит равенству $p=2\cdot5^4\cdot(8k+7)$. Если $n=625$, то $p=625\cdot626\cdot627=2\cdot5^4\cdot313\cdot627$. Это также противоречит равенству $p=2\cdot5^4\cdot(8k+7)$, так как число $313\cdot627$ даёт остаток 3 при делении на 8.

в) Пусть n — искомое число. Тогда десятичная запись произведения $p=n(n+1)(n+2)$ оканчивается на 4000. Это происходит тогда и только тогда, когда для некоторого натурального числа k имеем $p=k\cdot10^4+4000=2^4\cdot5^3\cdot(5k+2)$. Поскольку из чисел n, $n+1$ и $n+2$ только одно может делиться на 5, именно это число должно делиться и на $5^3=125$. Значит, либо $n=125m$, либо $n=125m-1$, либо $n=125m-2$ для некоторого числа $m=1, 2, ..., 7$. Поскольку произведение p делится на $2^4=16$, а среди чисел n, $n+1$ и $n+2$ не более двух чётных и не более одного кратного 4, получаем, что одно из этих чисел должно делиться на 8. Следовательно, число n при делении на 8 должно давать в остатке 0, 6 или 7.

Рассмотрим случай $n=125m$ ($m=1, 2, ..., 7$). Нужный остаток при делении на 8 будет лишь при $m=3$ и $m=6$. При $m=3$ произведение $p=375\cdot376\cdot377$ не делится на 16. При $m=6$ имеем $p=750\cdot751\cdot752=2^4\cdot5^3\cdot(3\cdot751\cdot94)$. Число $3\cdot751\cdot94$ действительно даёт при делении на 5 остаток 2. Значит, число $n=750$ — одно из искомых.

Рассмотрим случай $n=125m-1$ ($m=1, 2, ..., 7$). Нужный остаток при делении на 8 будет лишь при $m=3$ и $m=5$. При $m=3$ имеем $p=374\cdot375\cdot376=2^4\cdot5^3\cdot(187\cdot3\cdot47)$. Число $187\cdot3\cdot47$ действительно даёт при делении на 5 остаток 2. Значит, число $n=374$ — одно из искомых. При $m=5$ произведение $p=624\cdot625\cdot626$ делится на $625=5^4$, противоречие.

Наконец, рассмотрим случай $n=125m-2$ ($m=1, 2, ..., 7$). Нужный остаток при делении на 8 будет лишь при $m=2$ и $m=5$. При $m=2$ имеем $p=248\cdot249\cdot250=2^4\cdot5^3\cdot(31\cdot249)$. Число $31\cdot249$ не даёт при делении на 5 остаток 2, противоречие. При $m=5$ произведение $p=623\cdot624\cdot625$ делится на $625=5^4$, противоречие.

Следовательно, все искомые числа n — это 374 и 750.

Ответ: а) Да; б) нет; в) 374 и 750.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4