

Тренировочная работа №1 по МАТЕМАТИКЕ**11 класс**

30 сентября 2020 года

Вариант МА2010112

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

*Желаем успеха!***Справочные материалы**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

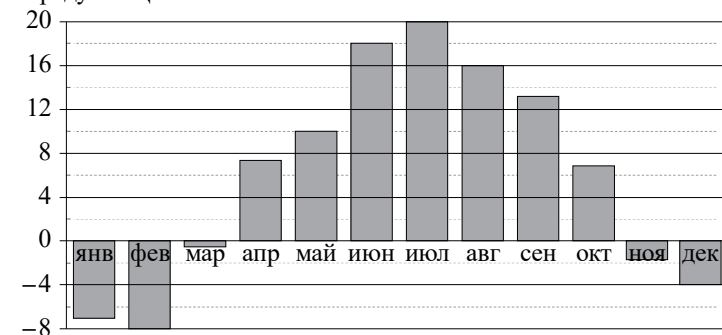
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1** Шариковая ручка стоит 10 рублей. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 500 рублей после повышения цены на 25 %?

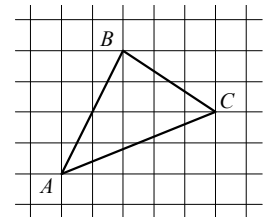
Ответ: _____.

- 2** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1999 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

- 3** На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его медианы, проведённой из вершины C .



Ответ: _____.

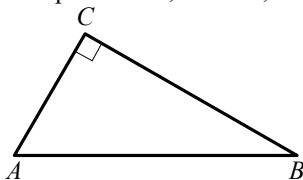
4 В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,11 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Ответ: _____.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{15}{3x-15}} = \frac{1}{4}$.

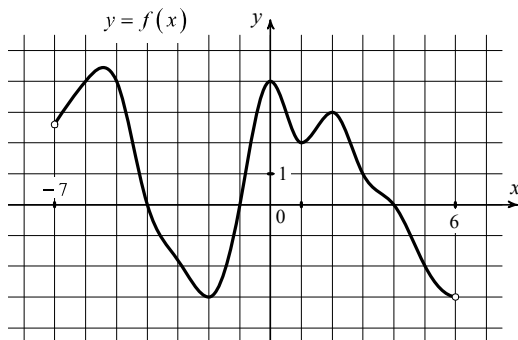
Ответ: _____.

6 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 6$, $BC = 2\sqrt{91}$. Найдите $\cos A$.



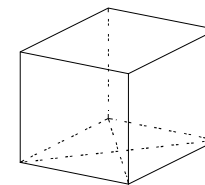
Ответ: _____.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 6)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Ответ: _____.

8 Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 8 и 15, а боковое ребро равно 28.



Ответ: _____.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $35^{3,4} \cdot 7^{-3,4} : 5^{1,4}$.

Ответ: _____.

10 После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,7 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ дайте в метрах.

Ответ: _____.

11 На изготовление 60 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 80 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: _____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 15 + 3x - 2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[0; 9]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2} + \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} = 2 \cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

14 В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = \sqrt{33}$, все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AM — точка F так, что $MF = BE = 3$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру MB .

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость CEF пересекает грань AMD пирамиды.

15 Решите неравенство $4^{x+3} - x^3 \cdot 4^x \leq 256 - 4x^3$.

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём диаметром окружности является его диагональ AC . Также известно, что в $ABCD$ можно вписать окружность.

а) Докажите, что отрезки AC и BD перпендикулярны.

б) Найдите радиус вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$, если $AC = 26$ и $BD = 10$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 1,35 млн руб.?

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} ((x-1)^2 + (y-4)^2)((x-4)^2 + (y-16)^2) \leq 0, \\ (x-a-1)^2 + (y-2a-2)^2 \leq 4(a+1)^2 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

19 а) Может ли десятичная запись произведения трёх последовательных трёхзначных чисел оканчиваться на 750?

б) Может ли десятичная запись произведения трёх последовательных трёхзначных чисел оканчиваться на 6250?

в) Найдите все такие натуральные числа n , что каждое из чисел n , $n+1$ и $n+2$ трёхзначное, а десятичная запись их произведения $n(n+1)(n+2)$ оканчивается на 8000.

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2010109-2010112 (профильный уровень) от
30.09.2020

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2010109	8	9	3	0,15	- 9	0,5	5	108	0,2	6000	31	6
2010110	12	21	4	0,168	- 3	0,6	7	540	12,5	8000	30	- 95
2010111	12	- 2	2	0,9996	102	0,4	6	476	98	2,8	9	76
2010112	40	- 8	4	0,9879	85	0,3	2	1072	25	1,2	8	16

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

- а) Решите уравнение $\sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2} + \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} = 2 \cos^2 x$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

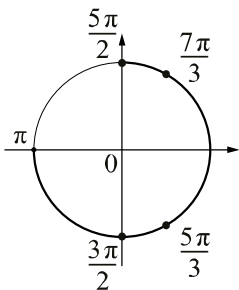
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$\cos \left(\frac{5x}{2} - \frac{3x}{2} \right) = 2 \cos^2 x; 2 \cos^2 x - \cos x = 0; 2 \cos x \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Следовательно, $\cos x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{2}$, а значит, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{2}$.

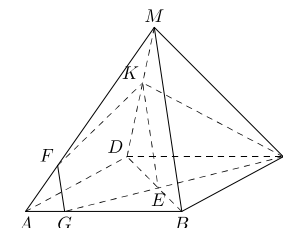
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = \sqrt{33}$, все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AM — точка F так, что $MF = BE = 3$.

- а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру MB .
 б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость CEF пересекает грань AMD пирамиды.

Решение.



а) По теореме Пифагора $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{33 + 16} = 7$, поэтому $DE = 7 - BE = 4$. Пусть прямая CE пересекает ребро AB в точке G . Тогда треугольники BGE и DCE подобны, поэтому $\frac{BG}{DC} = \frac{BE}{DE} = \frac{3}{4}$, а значит, $BG = 3$ и $AG = 1$. Поскольку $MA = MB = AB = 4$ и $MF = BG = 3$, отрезок FG параллелен отрезку MB . Следовательно, ребро MB параллельно плоскости CEF .

б) Пусть плоскость CEF пересекает отрезок MD в точке K . Так как прямая FG параллельна MB , по признаку параллельности прямой и плоскости FG параллельна плоскости MBD . Плоскость MBD и секущая плоскость пересекаются по прямой KE , и по свойству параллельных прямой и плоскости прямая KE параллельна FG и, следовательно, параллельна MB . Треугольники DKE и DMB подобны, поэтому $\frac{DK}{KM} = \frac{DE}{EB} = \frac{4}{3}$.

Тогда $MK = \frac{12}{7}$ и $DK = \frac{16}{7}$. Плоскость CEF пересекает грань AMD по отрезку FK .

По теореме косинусов для треугольника FMK получаем

$$FK^2 = FM^2 + MK^2 - 2 \cdot FM \cdot MK \cdot \cos \angle FMK.$$

Косинус угла FMK равен $\frac{AM^2 + MD^2 - AD^2}{2 \cdot AM \cdot MD} = -\frac{1}{32}$.

Следовательно, $FK = \frac{3\sqrt{267}}{14}$.

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{267}}{14}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	2
Верно доказан пункт <i>a</i> . ИЛИ Верно решён пункт <i>b</i> при отсутствии обоснований в пункте <i>a</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15) Решите неравенство $4^{x+3} - x^3 \cdot 4^x \leq 256 - 4x^3$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$4^x \cdot 64 - 256 - x^3 \cdot 4^x + 4x^3 \leq 0; \quad 64(4^x - 4) - x^3(4^x - 4) \leq 0;$$

$$(4^x - 4)(64 - x^3) \leq 0;$$

$$(4^x - 4)(4 - x)(16 + 4x + x^2) \leq 0 \text{ то есть } x \geq 4 \text{ или } x \leq 1.$$

Ответ: $(-\infty; 1]; [4; +\infty)$.

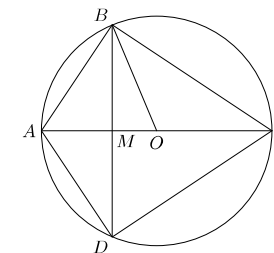
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём диаметром окружности является его диагональ AC . Также известно, что в $ABCD$ можно вписать окружность.

а) Докажите, что отрезки AC и BD перпендикулярны.

б) Найдите радиус вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$, если $AC = 26$ и $BD = 10$.

Решение.



а) Пусть BD и AC пересекаются в точке M . Так как $ABCD$ — описанный четырёхугольник, $AB + CD = BC + AD = s$. Будем считать, что $AB = x$, $BC = y$, тогда $CD = s - x$ и $AD = s - y$. Углы ABC и ADC прямые, так как AC — диаметр. По теореме Пифагора получаем $AC^2 = x^2 + y^2$ и $AC^2 = (s - x)^2 + (s - y)^2$. Отсюда следует, что $x + y = s$, то есть $AB = AD$ и $BC = DC$. Это значит, что треугольники ABC и ADC равны по третьему признаку равенства треугольников, поэтому $\angle ACB = \angle ACD$. Следовательно, CM — биссектриса треугольника DBC , а также его высота и медиана.

б) Пусть O — центр окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$. Тогда её радиус $OB = \frac{1}{2} AC = 13$, поэтому $OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = 12$.

Примем, что $AM < MC$, тогда $AM = 1$ и $MC = 25$. Рассматривая прямоугольные треугольники AMB и ABC , можем записать $\cos \angle BAM = \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AC}$, следовательно, $AB = \sqrt{AM \cdot AC} = \sqrt{26}$. Аналогично $BC = 5\sqrt{26}$, поэтому полупериметр четырёхугольника $ABCD$ равен $6\sqrt{26}$.

Площадь же четырёхугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 130$. Искомый радиус вписанной окружности равен $\frac{130}{6\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$.

Ответ: б) $\frac{5\sqrt{26}}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> . ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.
На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 1,35 млн руб.?

Решение.

Пусть кредит взят на n лет. По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$5, \frac{5(n-1)}{n}, \dots, \frac{5 \cdot 2}{n}, \frac{5}{n}, 0.$$

По условию каждый январь долг возрастает на 16 %. Значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$5,8, \frac{5,8(n-1)}{n}, \dots, \frac{5,8 \cdot 2}{n}, \frac{5,8}{n}.$$

Следовательно, наибольшая выплата составляет $0,8 + \frac{5}{n}$. Получаем

$$0,8 + \frac{5}{n} \leq 1,35, \text{ а значит, } n \geq 10.$$

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2

Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых система
- $$\begin{cases} ((x-1)^2 + (y-4)^2)((x-4)^2 + (y-16)^2) \leq 0, \\ (x-a-1)^2 + (y-2a-2)^2 \leq 4(a+1)^2 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Первое неравенство имеет ровно два решения: (1; 4), (4; 16). Следовательно, данная система имеет ровно два решения тогда и только тогда, когда второму неравенству системы удовлетворяют оба решения первого неравенства. Найдём все значения a , при каждом из которых справедлива система неравенств

$$\begin{cases} (1-a-1)^2 + (4-2a-2)^2 \leq 4(a+1)^2, \\ (4-a-1)^2 + (16-2a-2)^2 \leq 4(a+1)^2. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} a^2 + 4 - 8a + 4a^2 \leq 4a^2 + 8a + 4, & \begin{cases} a(a-16) \leq 0, \\ (a-3)(a-67) \leq 0. \end{cases} \\ 9 - 6a + a^2 + 196 - 56a + 4a^2 \leq 4a^2 + 8a + 4; \end{cases}$$

Получаем $3 \leq a \leq 16$.

Ответ: [3; 16].

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , кроме $a=3$ или $a=16$	3
Задача верно сведена к исследованию возможного решения второго неравенства при $x=1; y=4$ или $x=4; y=16$, но верный ответ отсутствует	2
С помощью верного рассуждения получены все решения первого неравенства, дальнейшее решение отсутствует	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

- 19 а) Может ли десятичная запись произведения трёх последовательных трёхзначных чисел оканчиваться на 750?
 б) Может ли десятичная запись произведения трёх последовательных трёхзначных чисел оканчиваться на 6250?
 в) Найдите все такие натуральные числа n , что каждое из чисел n , $n+1$ и $n+2$ трёхзначное, а десятичная запись их произведения $n(n+1)(n+2)$ оканчивается на 8000.

Решение.

а) Да. Имеем

$$249 \cdot 250 \cdot 251 = 250 \cdot (4 \cdot 62 + 1) \cdot (4 \cdot 62 + 3) = 1000 \cdot (4 \cdot 62^2 + 4 \cdot 62) + 750.$$

Значит, десятичная запись этого произведения оканчивается на 750.

б) Нет. Предположим, что десятичная запись произведения $p = n(n+1)(n+2)$ некоторых трёхзначных чисел n , $n+1$ и $n+2$ оканчивается на 6250. Тогда для некоторого натурального числа k имеем $p = k \cdot 10^4 + 6250 = 2 \cdot 5^4 \cdot (8k + 5)$. Поскольку из чисел n , $n+1$ и $n+2$ только одно может делиться на 5, именно это число должно делиться и на $5^4 = 625$. Есть лишь одно такое трёхзначное число — это 625. Значит, либо $n = 623$, либо $n = 624$, либо $n = 625$. В первых двух случаях p делится на 4, что противоречит равенству $p = 2 \cdot 5^4 \cdot (8k + 5)$. Если $n = 625$, то $p = 625 \cdot 626 \cdot 627 = 2 \cdot 5^4 \cdot 313 \cdot 627$. Это также противоречит равенству $p = 2 \cdot 5^4 \cdot (8k + 5)$, так как число $313 \cdot 627$ даёт остаток 3 при делении на 8.

в) Пусть n — искомое число. Тогда десятичная запись произведения $p = n(n+1)(n+2)$ оканчивается на 8000. Это происходит тогда и только тогда, когда для некоторого натурального числа k имеем $p = k \cdot 10^4 + 8000 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot (5k + 4)$. Поскольку из чисел n , $n+1$ и $n+2$ только одно может делиться на 5, именно это число должно делиться и на $5^3 = 125$. Значит, либо $n = 125m$, либо $n = 125m - 1$, либо $n = 125m - 2$ для некоторого числа $m = 1, 2, \dots, 7$. Поскольку произведение p делится на $2^4 = 16$, а среди чисел n , $n+1$ и $n+2$ не более двух чётных и не более одного кратного 4, получаем, что одно из этих чисел должно делиться на 8. Следовательно, число n при делении на 8 должно давать в остатке 0, 6 или 7.

Рассмотрим случай $n = 125m$ ($m = 1, 2, \dots, 7$). Нужный остаток при делении на 8 будет лишь при $m = 3$ и $m = 6$. При $m = 3$ произведение $p = 375 \cdot 376 \cdot 377$ не делится на 16. При $m = 6$ имеем $p = 750 \cdot 751 \cdot 752 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot (3 \cdot 751 \cdot 94)$. Число $3 \cdot 751 \cdot 94$ не даёт при делении на 5 остаток 4, противоречие.

Рассмотрим случай $n = 125m - 1$ ($m = 1, 2, \dots, 7$). Нужный остаток при делении на 8 будет лишь при $m = 3$ и $m = 5$. При $m = 3$ имеем $p = 374 \cdot 375 \cdot 376 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot (187 \cdot 3 \cdot 47)$. Число $187 \cdot 3 \cdot 47$ не даёт при делении на 5 остаток 4, противоречие. При $m = 5$ произведение $p = 624 \cdot 625 \cdot 626$ делится на $625 = 5^4$, противоречие.

Наконец, рассмотрим случай $n = 125m - 2$ ($m = 1, 2, \dots, 7$). Нужный остаток при делении на 8 будет лишь при $m = 2$ и $m = 5$. При $m = 2$ имеем $p = 248 \cdot 249 \cdot 250 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot (31 \cdot 249)$. Число $31 \cdot 249$ даёт при делении на 5 остаток 4. Значит, число $n = 248$ — одно из искомым. При $m = 5$ произведение $p = 623 \cdot 624 \cdot 625$ делится на $625 = 5^4$, противоречие.

Следовательно, единственное искомое число n — это 248.

Ответ: а) Да; б) нет; в) 248.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах <i>a</i> , <i>b</i> и <i>v</i>	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах <i>a</i> и <i>b</i> , либо получены верные обоснованные ответы в пунктах <i>a</i> и <i>v</i>	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте <i>b</i> , пункты <i>a</i> и <i>v</i> не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте <i>v</i> , пункты <i>a</i> и <i>b</i> не решены	2
Приведён пример в пункте <i>a</i> , пункты <i>b</i> и <i>v</i> не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4