Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

16 декабря 2020 года

Вариант МА2010210

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

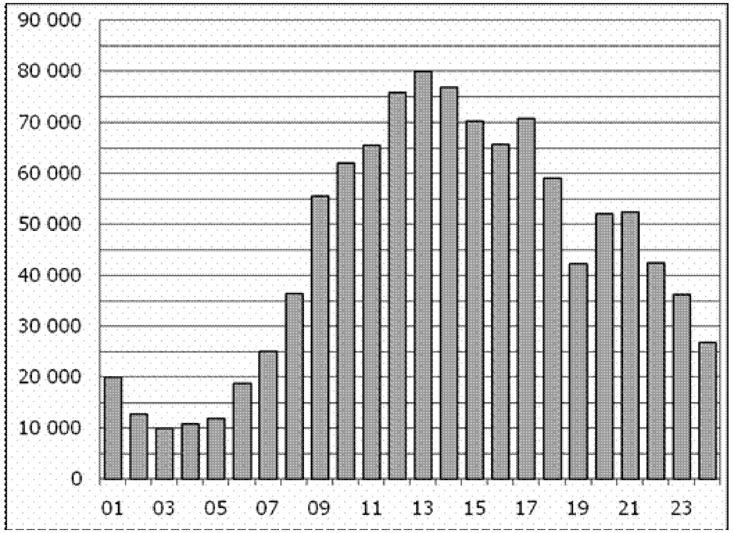
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Задачу № 1 правильно решили 22 010 человек, что составляет 71 % от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

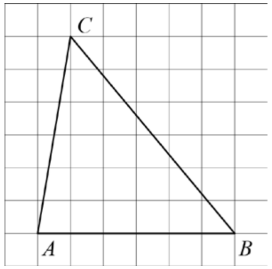
Ответ: ____________________________.

2 На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости в течение каждого часа 8 декабря 2009 года. По горизонтали указывается час, по вертикали — количество посетителей сайта на протяжении этого часа. Определите по диаграмме, в течение какого часа на сайте побывало максимальное количество посетителей.



Ответ: ____________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB.



Ответ: ___________________________.

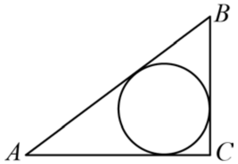
4 За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки **не** будут сидеть рядом.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $(x-3)^3=-512$.

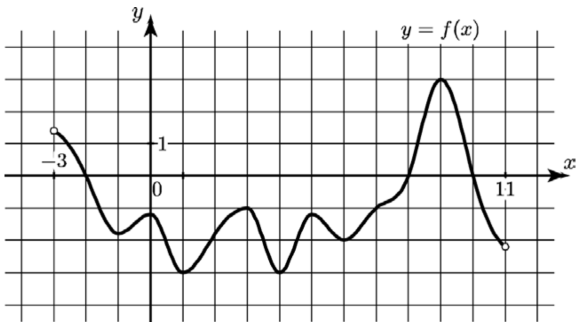
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC=24$, $BC=10$. Найдите радиус вписанной окружности.



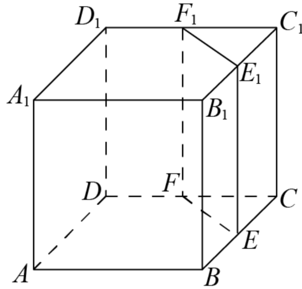
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-3;11)$. Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[2;9,5]$.



Ответ: ___________________________.

8 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 9. Найдите объём куба.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите $11\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=0,6$.

Ответ: ___________________________.

10 Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op, объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от 0 до 4.
Составители рейтинга считают, что объективность ценится вчетверо, а информативность публикаций — вдвое дороже, чем оперативность публикаций и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R=\frac{2In+Op+4Tr+Q}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 1.

Ответ: ___________________________.

11 Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, вторую треть — со скоростью 75 км/ч, а последнюю — со скоростью 45 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции $y = 6^{x^2-8x+28}$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\cos^2\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) = \cos^2\left(\frac{5\pi}{6} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14 $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, сторона AB равна 25. Через точки M и P, лежащие на рёбрах AC и BB_1 соответственно, проведена плоскость α, параллельная прямой AB. Сечение призмы этой плоскостью — четырёхугольник, одна сторона которого равна 25, а три другие равны между собой.

а) Докажите что периметр сечения призмы плоскостью α больше 62,5.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если упомянутый периметр равен 64.

15 Решите неравенство $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 1$.

16 В треугольнике ABC биссектрисы AK и BL пересекаются в точке I. Известно, что около четырёхугольника $CKIL$ можно описать окружность.

а) Докажите, что угол BCA равен 60°.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен 12 и $IC = 2$.

17 Михаил хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года у Михаила было недостаточно денег, а пакет стоил 160 000 рублей. В середине каждого месяца Михаил откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму, а в конце месяца пакет дорожает, но не более чем на 25 %. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Михаилу каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = 2a$$

имеет единственное решение.

19 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a + b$, где a и b — десятичные цифры, $a \neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b, c и d, что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 99$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b, c и d, что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 693$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 7?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 7?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2010209-2010212 (профильный уровень) от 16.12.2020

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2010209	32500	3	2,5	0,25	- 4	2	- 4	32	- 45,08	18	60	- 2
2010210	31000	13	3	0,75	- 5	4	- 3	72	- 3,08	32	54	4
2010211	340,8	9	5	0,039	6,5	2,4	- 0,5	300	- 4	60	9	- 38
2010212	369,6	6	3	0,0294	0,2	1,5	- 0,25	560	- 3	60	8	- 3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)=\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$.

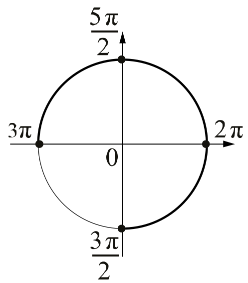
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)\right)\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)\right)=0; \qquad \sin x\cos x=0,$$

а значит, $\sin 2x=0$, следовательно, $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $\frac{3\pi}{2}$; 2π; $\frac{5\pi}{2}$; 3π.

Ответ: а) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; 2π; $\frac{5\pi}{2}$; 3π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

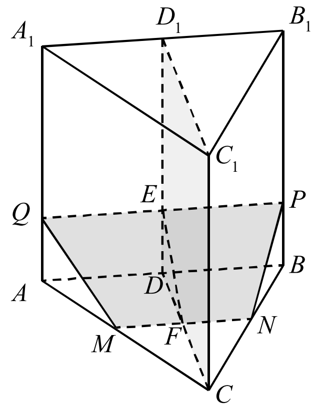
14

$ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, сторона AB равна 25. Через точки M и P, лежащие на рёбрах AC и BB_1 соответственно, проведена плоскость α, параллельная прямой AB. Сечение призмы этой плоскостью — четырёхугольник, одна сторона которого равна 25, а три другие равны между собой.

а) Докажите что периметр сечения призмы плоскостью α больше 62,5.

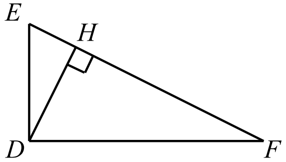
б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если упомянутый периметр равен 64.

Решение.



а) Отметим на рёбрах BC и AA_1 точки N и Q соответственно так, что прямые MN, PQ и AB параллельны. Тогда трапеция $PQMN$ — искомое сечение. В ней $PQ=25$, и пусть $QM=MN=NP=x$. Треугольник CMN равносторонний, значит, $MC=x$ и $AM=25-x$. В прямоугольном треугольнике QAM катет $AM=25-x$ короче гипотенузы $QM=x$, поэтому $x>25-x$, то есть $x>12{,}5$. Тогда можем оценить периметр сечения: $PQ+QM+MN+NP=25+3x>62{,}5$.

б) В данном случае $25+3x=64$, то есть $x=13$. Тогда $QM=MC=13$, $AM=25-13=12$ и $AQ=\sqrt{QM^2-AM^2}=5$. Поскольку плоскость α параллельна прямой AB, расстояние от любой точки прямой AB до α одно и то же, так что найдём расстояние от D до α, где D — середина AB. Пусть точка D_1 — середина A_1B_1, тогда плоскость CDD_1 перпендикулярна α.



Искомое расстояние — высота DH прямоугольного треугольника EFD, где E — точка пересечения прямых DD_1 и PQ, F — точка пересечения прямых DC и MN. В треугольнике EFD сторона DE равна 5, $DF=\frac{12}{25}DC=\frac{12}{25}\cdot\frac{25\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$, $EF=\sqrt{ED^2+DF^2}=\sqrt{133}$ и

$$DH=\frac{DE\cdot DF}{EF}=\frac{30\sqrt{399}}{133}.$$

Ответ: б) $\frac{30\sqrt{399}}{133}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{(x+1)(x+2)(x+3)}-1>0;\ \frac{x^3-6x^2+11x-6-\left(x^3+6x^2+11x+6\right)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0;$$

$\frac{-12x^2-12}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0$; $\frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}<0$, следовательно, $x<-3$ или $-2<x<-1$.

Ответ: $(-\infty;-3)$; $(-2;-1)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

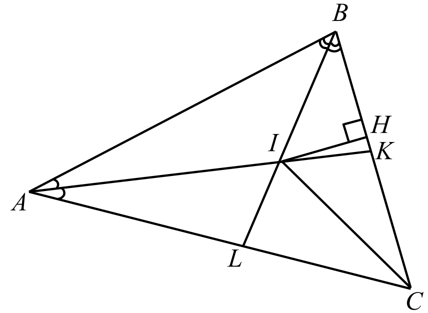
16

В треугольнике ABC биссектрисы AK и BL пересекаются в точке I. Известно, что около четырёхугольника $CKIL$ можно описать окружность.

а) Докажите, что угол BCA равен 60°.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен 12 и $IC=2$.

Решение.



а) Обозначим через α и β углы CAB и ABC соответственно. Тогда углы IAB и ABI равны $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ соответственно. По теореме о сумме углов треугольника получаем, что угол BIA равен $180^\circ-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}$. Такая же величина у вертикального к нему угла LIK.

По условию около четырёхугольника $CKIL$ можно описать окружность. Следовательно, угол BCA дополняет угол LIK до 180°. С другой стороны, по теореме о сумме углов треугольника угол BCA дополняет до 180° сумму углов α и β. Следовательно, $180^\circ-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=\alpha+\beta$ и $\alpha+\beta=120^\circ$. Значит, угол BCA равен 60°.

б) Поскольку точка I является точкой пересечения биссектрис AK и BL, она также лежит на биссектрисе угла BCA и является центром вписанной в треугольник ABC окружности. Значит, радиус этой окружности равен длине перпендикуляра IH, опущенного из этой точки на BC.

По доказанному угол HCI равен половине угла BCA, то есть он равен 30°. В прямоугольном треугольнике HCI против угла в 30° лежит катет IH. Следовательно, $IH = \frac{1}{2} \cdot IC = 1$.

Площадь треугольника ABC равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности. Значит, эта площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 1 = 6$.

Ответ: б) 6.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Михаил хочет купить пакет акций компании. 15 февраля он отложил определённую сумму денег и планирует откладывать такую же сумму денег 15 числа каждого месяца. Первого февраля пакет акций стоил 160 000 рублей. Первого числа каждого месяца пакет акций дорожает на 25 %. Какую наименьшую сумму нужно Михаилу откладывать каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

Решение.

Пусть Михаил откладывает в середине каждого месяца x рублей. К середине n-го месяца у Михаила скопится nx рублей, а акции будут стоить не более $160\,000 \cdot 1{,}25^{n-1}$ рублей. Для того чтобы Михаил смог купить пакет акций в этом месяце, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$x \geq \frac{160\,000 \cdot 1{,}25^{n-1}}{n}$. Положим $a_n = \frac{160\,000 \cdot 1{,}25^{n-1}}{n}$. Для того чтобы Михаил смог через некоторое время купить пакет акций, необходимо и достаточно откладывать сумму, большую либо равную наименьшему из чисел a_n. Сравним два последовательных таких числа. Для этого вычислим их отношение: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1{,}25 \cdot n}{n+1} = \frac{5n}{4n+4}$. Отсюда получаем, что при $n \leq 4$ выполнено неравенство $a_{n+1} \leq a_n$, причём равенство достигается только при $n = 4$, а при $n \geq 4$ выполнено неравенство $a_{n+1} \geq a_n$. Значит, наименьшими из чисел a_n будут числа

$$a_4 = a_5 = \frac{160\,000 \cdot 1{,}25^3}{4} = 78\,125.$$

Поэтому наименьшая сумма, которую нужно откладывать Михаилу, равна 78 125 рублям.

Ответ: 78 125 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = 2a$$

имеет единственное решение.

Решение.

При $a = 0$ уравнение $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = 2a$ принимает вид $\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$ и имеет бесконечно много решений.

При $a \neq 0$ выражения $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}$ и $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}$ имеют смысл при $x \geq |a|$. При таких значениях a и x имеем $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} > 0$. Значит, в этом случае уравнение $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = 2a$ равносильно уравнениям

$$\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right)=2a\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right),$$

$$(x+a)-(x-a)=2a\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right) \text{ и } \sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=1.$$

Пусть $a\neq 0$ и $f(x)=\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}$. Тогда функция $y=f(x)$ определена при $x\in\left[|a|;+\infty\right)$, непрерывна и строго возрастает на своей области определения. Следовательно, область значений функции $f(x)$ равна $\left[\sqrt{2|a|};+\infty\right)$, причём каждое своё значение функция $f(x)$ принимает по одному разу. Значит, уравнение $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=1$ и равносильное ему исходное уравнение $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}=2a$ имеют единственное решение при $\sqrt{2|a|}\le 1$, то есть при $-\frac{1}{2}\le a<0$ и $0<a\le\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};0\right)$; $\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого только исключением точек $-\frac{1}{2}$ и/или $\frac{1}{2}$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого только включением точки 0 ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного количества корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a+b$, где a и b — цифры, $a\neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=99$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=693$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 7?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 7?

Решение.

а) Да.

Действительно, поскольку

$$\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=(10a+b)\cdot(10c+d)-(10b+a)\cdot(10d+c)=99\cdot(ac-bd),$$

нужно подобрать такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $ac-bd=1$. Это верно, например, при $a=1$, $b=2$, $c=9$ и $d=4$.

б) Докажем, что это невозможно. Имеем $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=99\cdot(ac-bd)$.

Значит, если $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=693$, то $99\cdot(ac-bd)=693=99\cdot 7$ и $ac-bd=7$.

Если среди цифр a, b, c и d есть цифра 7, то одно из произведений ac или bd делится на 7, а значит, и другое произведение тоже делится на 7. Это невозможно, так как в этом случае среди цифр a, b, c и d есть по крайней мере две цифры 7.

в) Как показано выше, имеем $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=99\cdot(ac-bd)$. Рассмотрим все возможные случаи, когда среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 7.

Если цифры 5 и 7 — это a и c, то $ac-bd\le 5\cdot 7-1\cdot 2=33$.

Если цифры 5 и 7 — это b и d, то $ac-bd\le 8\cdot 9-5\cdot 7=37$.

Если цифра 5 — это a или c, а цифра 7 — это b или d, то $ac-bd\le 5\cdot 9-7\cdot 1=38$.

Если цифра 7 — это a или c, а цифра 5 — это b или d, то $ac-bd\le 7\cdot 9-5\cdot 1=58$.

Значит, наибольшее возможное значение выражения $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$ равно $99\cdot 58=5742$, оно достигается при $a=7$, $b=5$, $c=9$ и $d=1$.

Ответ: а) Да; б) нет; в) $99\cdot 58=5742$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4