Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
16 декабря 2020 года
Вариант МА2010212
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

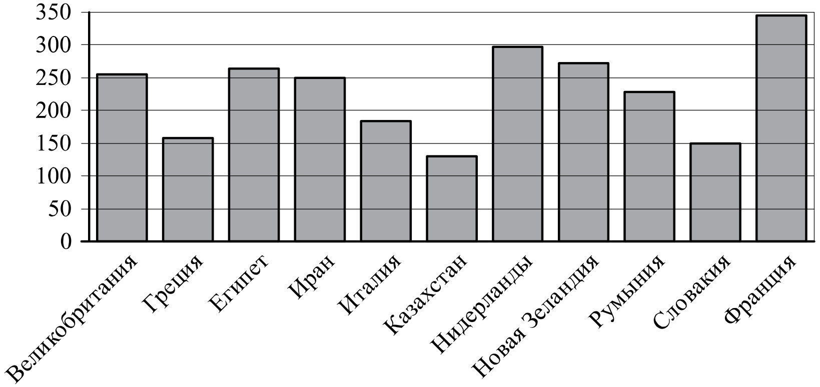
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 В квартире установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). Показания счётчика 1 июля составляли 178 куб. м воды, а 1 августа — 194 куб. м. Сколько нужно заплатить за холодную воду за июль, если стоимость 1 куб. м холодной воды составляет 23 руб. 10 коп.? Ответ дайте в рублях.

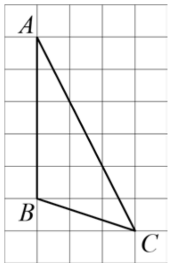
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке алюминия занимала Франция, одиннадцатое место — Казахстан. Какое место занимал Иран?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AB.



Ответ: ____________________________.

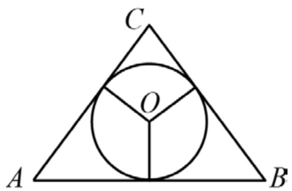
4 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $\dfrac{1}{9x+5}=\dfrac{1}{4x+6}$.

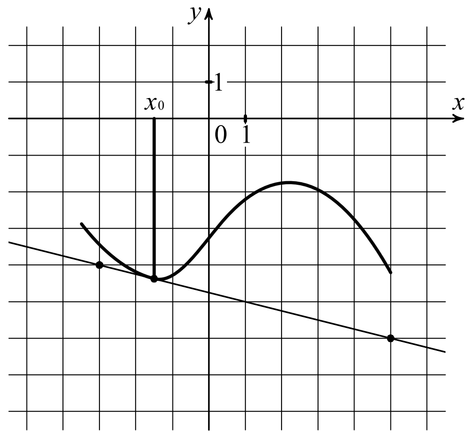
Ответ: ____________________________.

6 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.



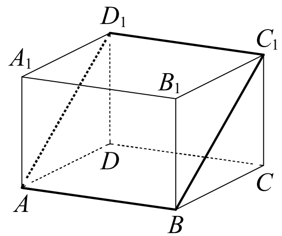
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ____________________________.

8 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=16$, $AD=21$, $AA_1=28$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\sqrt{18}\cos^2\dfrac{3\pi}{8}-\sqrt{18}\sin^2\dfrac{3\pi}{8}$.

Ответ: ____________________________.

10 Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v = 4$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos\alpha$ (м/с), где $m = 70$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 280$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,4 м/с?

Ответ: ____________________________.

11 По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 160 метров, второй — длиной 140 метров. Сначала второй сухогруз отстаёт от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 700 метров. Через 15 минут после этого уже первый сухогруз отстаёт от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 1000 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = (x-1)^2(x+2) - 3$ на отрезке $[-1; 10]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\cos^2\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) = \cos^2\left(\frac{5\pi}{6} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14 $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, сторона AB равна 25. Через точки M и P, лежащие на рёбрах AC и BB_1 соответственно, проведена плоскость α, параллельная прямой AB. Сечение призмы этой плоскостью — четырёхугольник, одна сторона которого равна 25, а три другие равны между собой.

а) Докажите что периметр сечения призмы плоскостью α больше 62,5.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если упомянутый периметр равен 64.

15 Решите неравенство $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 1$.

16 В треугольнике ABC биссектрисы AK и BL пересекаются в точке I. Известно, что около четырёхугольника $CKIL$ можно описать окружность.

а) Докажите, что угол BCA равен 60°.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен 12 и $IC = 2$.

17 Михаил хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года у Михаила было недостаточно денег, а пакет стоил 160 000 рублей. В середине каждого месяца Михаил откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму, а в конце месяца пакет дорожает, но не более чем на 25 %. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Михаилу каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = 2a$$

имеет единственное решение.

19 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a + b$, где a и b — десятичные цифры, $a \neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b, c и d, что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 99$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b, c и d, что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 693$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 7?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 7?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2010209-2010212 (профильный уровень) от 16.12.2020

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2010209	32500	3	2,5	0,25	- 4	2	- 4	32	- 45,08	18	60	- 2
2010210	31000	13	3	0,75	- 5	4	- 3	72	- 3,08	32	54	4
2010211	340,8	9	5	0,039	6,5	2,4	- 0,5	300	- 4	60	9	- 38
2010212	369,6	6	3	0,0294	0,2	1,5	- 0,25	560	- 3	60	8	- 3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)=\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$.

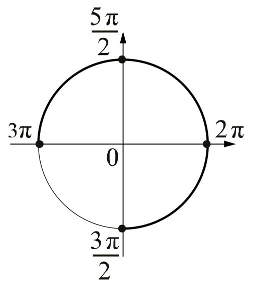
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)\right)\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)\right)=0;\qquad \sin x\cos x=0,$$

а значит, $\sin 2x=0$, следовательно, $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $\frac{3\pi}{2}$; 2π; $\frac{5\pi}{2}$; 3π.

Ответ: а) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; 2π; $\frac{5\pi}{2}$; 3π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

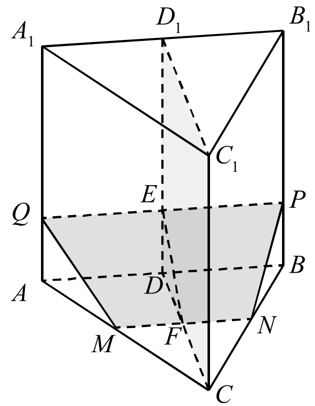
14

$ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, сторона AB равна 25. Через точки M и P, лежащие на рёбрах AC и BB_1 соответственно, проведена плоскость α, параллельная прямой AB. Сечение призмы этой плоскостью — четырёхугольник, одна сторона которого равна 25, а три другие равны между собой.

а) Докажите что периметр сечения призмы плоскостью α больше 62,5.

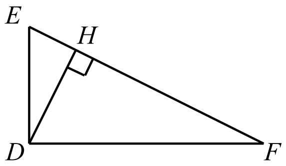
б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если упомянутый периметр равен 64.

Решение.



а) Отметим на рёбрах BC и AA_1 точки N и Q соответственно так, что прямые MN, PQ и AB параллельны. Тогда трапеция $PQMN$ — искомое сечение. В ней $PQ=25$, и пусть $QM=MN=NP=x$. Треугольник CMN равносторонний, значит, $MC=x$ и $AM=25-x$. В прямоугольном треугольнике QAM катет $AM=25-x$ короче гипотенузы $QM=x$, поэтому $x>25-x$, то есть $x>12{,}5$. Тогда можем оценить периметр сечения: $PQ+QM+MN+NP=25+3x>62{,}5$.

б) В данном случае $25+3x=64$, то есть $x=13$. Тогда $QM=MC=13$, $AM=25-13=12$ и $AQ=\sqrt{QM^2-AM^2}=5$. Поскольку плоскость α параллельна прямой AB, расстояние от любой точки прямой AB до α одно и то же, так что найдём расстояние от D до α, где D — середина AB. Пусть точка D_1 — середина A_1B_1, тогда плоскость CDD_1 перпендикулярна α.



Искомое расстояние — высота DH прямоугольного треугольника EFD, где E — точка пересечения прямых DD_1 и PQ, F — точка пересечения прямых DC и MN. В треугольнике EFD сторона DE равна 5, $DF=\frac{12}{25}DC=\frac{12}{25}\cdot\frac{25\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$, $EF=\sqrt{ED^2+DF^2}=\sqrt{133}$ и

$$DH=\frac{DE\cdot DF}{EF}=\frac{30\sqrt{399}}{133}.$$

Ответ: б) $\frac{30\sqrt{399}}{133}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{(x+1)(x+2)(x+3)}-1>0;\ \frac{x^3-6x^2+11x-6-\left(x^3+6x^2+11x+6\right)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0;$$

$\frac{-12x^2-12}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0$; $\frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}<0$, следовательно, $x<-3$ или $-2<x<-1$.

Ответ: $(-\infty;-3)$; $(-2;-1)$.

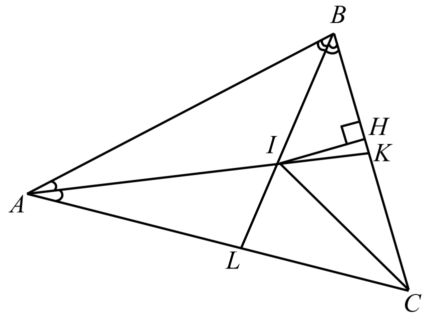
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC биссектрисы AK и BL пересекаются в точке I. Известно, что около четырёхугольника $CKIL$ можно описать окружность.

а) Докажите, что угол BCA равен 60°.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен 12 и $IC=2$.

Решение.



а) Обозначим через α и β углы CAB и ABC соответственно. Тогда углы IAB и ABI равны $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ соответственно. По теореме о сумме углов треугольника получаем, что угол BIA равен $180^\circ-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}$. Такая же величина у вертикального к нему угла LIK.

По условию около четырёхугольника $CKIL$ можно описать окружность. Следовательно, угол BCA дополняет угол LIK до 180°. С другой стороны, по теореме о сумме углов треугольника угол BCA дополняет до 180° сумму углов α и β. Следовательно, $180^\circ-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=\alpha+\beta$ и $\alpha+\beta=120^\circ$. Значит, угол BCA равен 60°.

б) Поскольку точка I является точкой пересечения биссектрис AK и BL, она также лежит на биссектрисе угла BCA и является центром вписанной в треугольник ABC окружности. Значит, радиус этой окружности равен длине перпендикуляра IH, опущенного из этой точки на BC.

По доказанному угол HCI равен половине угла BCA, то есть он равен 30°. В прямоугольном треугольнике HCI против угла в 30° лежит катет IH. Следовательно, $IH = \frac{1}{2} \cdot IC = 1$.

Площадь треугольника ABC равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности. Значит, эта площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 1 = 6$.

Ответ: б) 6.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Михаил хочет купить пакет акций компании. 15 февраля он отложил определённую сумму денег и планирует откладывать такую же сумму денег 15 числа каждого месяца. Первого февраля пакет акций стоил 160 000 рублей. Первого числа каждого месяца пакет акций дорожает на 25 %. Какую наименьшую сумму нужно Михаилу откладывать каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

Решение.

Пусть Михаил откладывает в середине каждого месяца x рублей. К середине n-го месяца у Михаила скопится nx рублей, а акции будут стоить не более $160\,000 \cdot 1{,}25^{n-1}$ рублей. Для того чтобы Михаил смог купить пакет акций в этом месяце, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$x \geq \frac{160\,000 \cdot 1{,}25^{n-1}}{n}$. Положим $a_n = \frac{160\,000 \cdot 1{,}25^{n-1}}{n}$. Для того чтобы Михаил смог через некоторое время купить пакет акций, необходимо и достаточно откладывать сумму, большую либо равную наименьшему из чисел a_n. Сравним два последовательных таких числа. Для этого вычислим их отношение: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1{,}25 \cdot n}{n+1} = \frac{5n}{4n+4}$. Отсюда получаем, что при $n \leq 4$ выполнено неравенство $a_{n+1} \leq a_n$, причём равенство достигается только при $n = 4$, а при $n \geq 4$ выполнено неравенство $a_{n+1} \geq a_n$. Значит, наименьшими из чисел a_n будут числа

$$a_4 = a_5 = \frac{160\,000 \cdot 1{,}25^3}{4} = 78\,125.$$

Поэтому наименьшая сумма, которую нужно откладывать Михаилу, равна 78 125 рублям.

Ответ: 78 125 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = 2a$$

имеет единственное решение.

Решение.

При $a = 0$ уравнение $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = 2a$ принимает вид $\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$ и имеет бесконечно много решений.

При $a \neq 0$ выражения $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}$ и $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}$ имеют смысл при $x \geq |a|$. При таких значениях a и x имеем $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} > 0$. Значит, в этом случае уравнение $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = 2a$ равносильно уравнениям

$$\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right)=2a\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right),$$

$$(x+a)-(x-a)=2a\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right) \text{ и } \sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=1.$$

Пусть $a\neq 0$ и $f(x)=\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}$. Тогда функция $y=f(x)$ определена при $x\in\left[|a|;+\infty\right)$, непрерывна и строго возрастает на своей области определения. Следовательно, область значений функции $f(x)$ равна $\left[\sqrt{2|a|};+\infty\right)$, причём каждое своё значение функция $f(x)$ принимает по одному разу. Значит, уравнение $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=1$ и равносильное ему исходное уравнение $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}=2a$ имеют единственное решение при $\sqrt{2|a|}\leq 1$, то есть при $-\frac{1}{2}\leq a<0$ и $0<a\leq\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};0\right)$; $\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого только исключением точек $-\frac{1}{2}$ и/или $\frac{1}{2}$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого только включением точки 0 ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного количества корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a+b$, где a и b — цифры, $a\neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=99$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=693$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 7?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 7?

<u>Решение.</u>

а) Да.

Действительно, поскольку

$$\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=(10a+b)\cdot(10c+d)-(10b+a)\cdot(10d+c)=99\cdot(ac-bd),$$

нужно подобрать такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $ac-bd=1$. Это верно, например, при $a=1$, $b=2$, $c=9$ и $d=4$.

б) Докажем, что это невозможно. Имеем $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=99\cdot(ac-bd)$.

Значит, если $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=693$, то $99\cdot(ac-bd)=693=99\cdot 7$ и $ac-bd=7$. Если среди цифр a, b, c и d есть цифра 7, то одно из произведений ac или bd делится на 7, а значит, и другое произведение тоже делится на 7. Это невозможно, так как в этом случае среди цифр a, b, c и d есть по крайней мере две цифры 7.

в) Как показано выше, имеем $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=99\cdot(ac-bd)$. Рассмотрим все возможные случаи, когда среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 7.

Если цифры 5 и 7 — это a и c, то $ac-bd\leq 5\cdot 7-1\cdot 2=33$.

Если цифры 5 и 7 — это b и d, то $ac-bd\leq 8\cdot 9-5\cdot 7=37$.

Если цифра 5 — это a или c, а цифра 7 — это b или d, то $ac-bd\leq 5\cdot 9-7\cdot 1=38$.

Если цифра 7 — это a или c, а цифра 5 — это b или d, то $ac-bd\leq 7\cdot 9-5\cdot 1=58$.

Значит, наибольшее возможное значение выражения $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$ равно $99\cdot 58=5742$, оно достигается при $a=7$, $b=5$, $c=9$ и $d=1$.

Ответ: а) Да; б) нет; в) $99\cdot 58=5742$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4