Тренировочная работа №1 по МАТЕМАТИКЕ
10 класс
28 января 2021 года
Вариант МА2000309
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа включает в себя 19 заданий и состоит из двух частей.

Ответом в заданиях части 1 (1–12) является целое число или десятичная дробь. Запишите ответ в отведённом для него месте на листе с заданиями.

В заданиях части 2 (13–19) требуется записать полное решение на отдельном чистом листе.

При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором.

При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут.

Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий. Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

Желаем успеха!

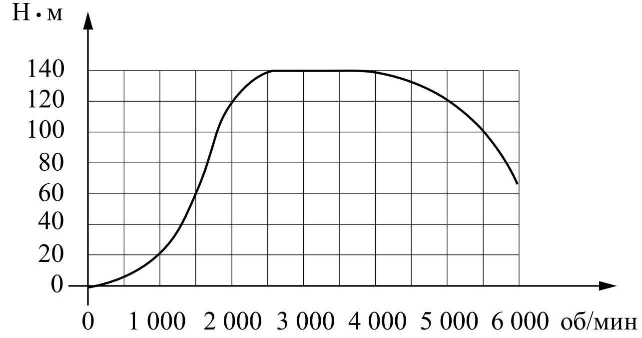
Часть 1

В заданиях 1–12 дайте ответ в виде целого числа, или десятичной дроби, или последовательности цифр.

1 Рост человека равен 6 футов 5 дюймов. Выразите его рост в сантиметрах, если 1 фут равен 12 дюймам. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

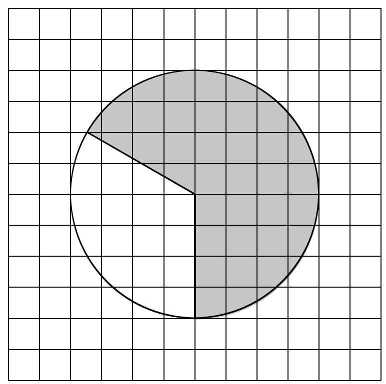
Ответ: ___________________________.

2 На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н·м. Чему равен крутящий момент (в Н·м), если двигатель делает 5000 оборотов в минуту?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге изображён круг площадью 45. Найдите площадь заштрихованного сектора.



Ответ: ___________________________.

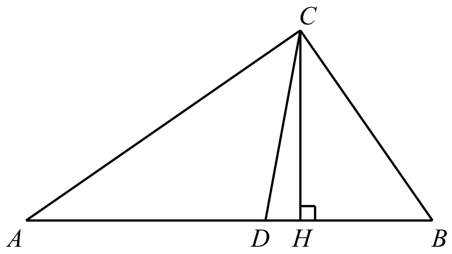
4 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 5, но не дойдя до отметки 11.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $(x-14)^2=-56x$.

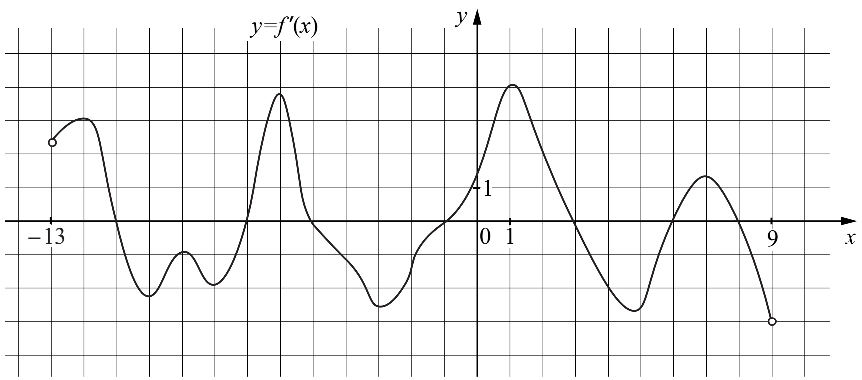
Ответ: ___________________________.

6 Один из углов прямоугольного треугольника равен 65°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



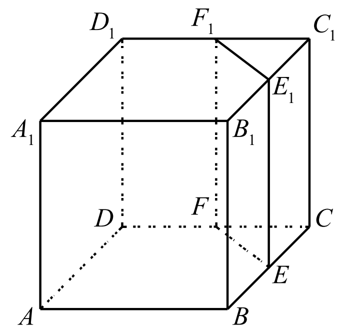
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-13;9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-12;5]$.



Ответ: ___________________________.

8 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 25. Найдите объём куба.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{2}{3}}-\sqrt{16\frac{2}{3}}\right):\sqrt{\frac{2}{27}}$.

Ответ: ___________________________.

10 К источнику с ЭДС $\varepsilon=185$ В и внутренним сопротивлением $r=0{,}5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U=\frac{\varepsilon R}{R+r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 180 В? Ответ выразите в омах.

Ответ: ___________________________.

11 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 24 минуты, второй и третий — за 30 минут, а первый и третий — за 40 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=(x+3)^2(x+10)+10$ на отрезке $[-7;6]$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

В заданиях 13–19 запишите полное решение на отдельном чистом листе.

13 а) Решите уравнение $\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[4\pi;\,7\pi]$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB=5$, $AD=12$, $AA_1=8$.

а) Докажите, что плоскость DBB_1 образует равные углы с плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

б) Найдите угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

15 Решите неравенство $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}\ge\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+8}$.

16 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и BC в точках E и F соответственно. Известно, что точки A, E, F и C лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, на которой лежат точки A, E, F и C, если $AC=4$ и $BA=5$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что на шестой месяц кредитования выплата составит 25 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$2(x^2+ax)+\frac{1}{x^2+ax}-3=0$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$.

19 Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n)=2S(n)+7$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n)=3S(n)+7$?

в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n)=8S(n)+65$?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2000309-2000310 (профильный уровень) от 28.01.2021

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2000309	196	120	30	0,5	- 14	20	3	200	- 9	18	20	10
2000310	180	100	10	0,25	- 13	8	2	112	2	18	36	- 7

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi;\,7\pi\right]$.

<u>Решение.</u>

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos x+\cos\frac{x}{2}=0;\quad 2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-1=0.$$

Значит, $\cos\frac{x}{2}=-1$ или $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, следовательно, $x=2\pi+4\pi n$ или $x=\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, где $n,k\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[4\pi;\,7\pi\right]$:

$$4\pi\le 2\pi+4\pi n\le 7\pi;\ \frac{1}{2}\le n\le\frac{5}{4};\ n=1;\ x=6\pi;$$

$$4\pi\le\frac{2\pi}{3}+4\pi k\le 7\pi;\ \frac{5}{6}\le k\le\frac{19}{12};\ k=1;\ x=\frac{14\pi}{3};$$

$$4\pi\le-\frac{2\pi}{3}+4\pi k\le 7\pi;\ \frac{7}{6}\le k\le\frac{23}{12};\ \text{таких значений } k\in\mathbb{Z} \text{ не существует}.$$

Получим числа 6π; $\frac{14\pi}{3}$.

Ответ: а) $2\pi+4\pi n$, $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, где $n,k\in\mathbb{Z}$; б) 6π; $\frac{14\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB=5$, $AD=12$, $AA_1=8$.

а) Докажите, что плоскость DBB_1 образует равные углы с плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

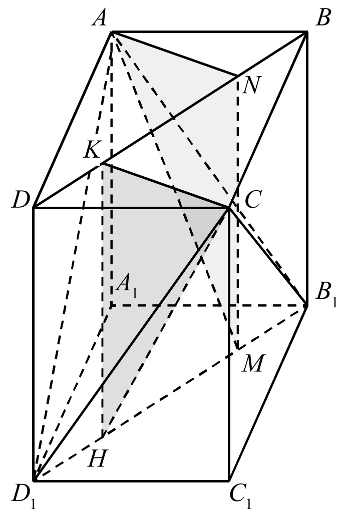
б) Найдите угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

<u>Решение.</u>

а) В треугольниках CD_1B_1 и AD_1B_1 проведём высоты CH и AM.

Через точки H и M проведём отрезки HK и MN, перпендикулярные плоскостям оснований параллелепипеда. Поскольку наклонные CH и AM перпендикулярны прямой DB, их проекции KC и AN тоже перпендикулярны прямой DB, а следовательно, KC и AN равны между собой.

Прямоугольные треугольники HCK и MAN равны по двум катетам, поэтому $\angle KHC=\angle NMA$, т. е. плоскость DBB_1 образует равные углы с плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.



б) Угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1 равен сумме углов, которые плоскость DBB_1 образует с плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

Из треугольника DCB находим, что $BD=13$; $CK=\frac{DC\cdot CB}{DB}$; $CK=\frac{12\cdot 5}{13}=\frac{60}{13}$.

Из треугольника KHC находим, что $\operatorname{tg}\angle KHC=\frac{CK}{KH}$; $\operatorname{tg}\angle KHC=\frac{60}{13\cdot 8}=\frac{15}{26}$;

$\angle KHC=\operatorname{arctg}\frac{15}{26}$.

Поэтому угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1 равен $2\operatorname{arctg}\frac{15}{26}$.

Ответ: б) $2\operatorname{arctg}\frac{15}{26}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9} \ge \dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+8}$.

Решение.

Имеем $8-2x-x^2 \ge 0$; $(x+4)(x-2) \le 0$, следовательно $-4 \le x \le 2$.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\sqrt{8-2x-x^2}\left(\frac{1}{2x+9}-\frac{1}{x+8}\right) \ge 0;\ \sqrt{8-2x-x^2}\left(\frac{x+1}{(2x+9)(x+8)}\right) \le 0.$$

Получаем $-4 \le x \le -1$ и $x=2$.

Ответ: $[-4;-1]$; 2.

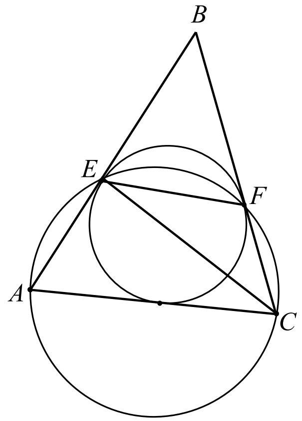
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и BC в точках E и F соответственно. Известно, что точки A, E, F и C лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, на которой лежат точки A, E, F и C, если $AC=4$ и $BA=5$.

Решение.



а) Поскольку $EB=BF$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки, треугольник EBF равнобедренный. Значит, $\angle BEF=\angle BFE$, а потому равны и смежные с ними углы: $\angle AEF=\angle CFE$. Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна $180°$, поэтому $\angle BAC=180°-\angle CFE=180°-\angle AEF=\angle BCA$, то есть треугольник ABC равнобедренный с основанием AC.

б) В треугольнике ABC известны стороны $AB=BC=5$ и $AC=4$. Прямая EF параллельна прямой AC. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки, $AE=CF=\frac{1}{2}AC=2$.

Пусть $\angle BAC=\alpha$, тогда $\cos\alpha=\dfrac{AC}{2\cdot AB}=\dfrac{2}{5}$ и $\sin\alpha=\sqrt{1-\dfrac{4}{25}}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$. Радиус описанной около трапеции $AEFC$ окружности найдём из треугольника AEC по теореме синусов: $R=\dfrac{EC}{2\sin\alpha}$. Длину EC найдём по теореме косинусов: $EC=\sqrt{2^2+4^2-2\cdot2\cdot4\cdot\cos\alpha}=2\sqrt{\dfrac{17}{5}}$. Таким образом, $R=\dfrac{5\cdot2\sqrt{17}}{2\sqrt{5\cdot21}}=\sqrt{\dfrac{85}{21}}$.

Ответ: б) $\sqrt{\dfrac{85}{21}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что на шестой месяц кредитования выплата составит 25 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

Решение.
Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:
$S;\ \frac{10S}{11};\ \ldots;\ \frac{2S}{11};\ \frac{S}{11};\ 0.$
Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:
$1{,}04S;\ 1{,}04\cdot\frac{10S}{11};\ \ldots;\ 1{,}04\cdot\frac{2S}{11};\ 1{,}04\cdot\frac{S}{11}.$
Следовательно, выплаты должны быть следующими:
$0{,}04S+\frac{S}{11};\ \frac{10\cdot 0{,}04S+S}{11};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}04S+S}{11};\ \frac{0{,}04S+S}{11}.$
На шестой месяц выплата составит $\frac{6\cdot 0{,}04\cdot S+S}{11}=\frac{1{,}24S}{11}$. А всего следует выплатить
$S+S\cdot 0{,}04\left(1+\frac{10}{11}+\ldots+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}\right)=S\left(1+\frac{12\cdot 0{,}04}{2}\right)=1{,}24S.$
Значит, банку нужно вернуть $25\,000\cdot 11=275\,000$ рублей.
Ответ: 275 000 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2

Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение
$$2(x^2+ax)+\frac{1}{x^2+ax}-3=0$$
имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$.

Решение.
Приводя к общему знаменателю и раскладывая на множители числитель, преобразуем уравнение $2(x^2+ax)+\frac{1}{x^2+ax}-3=0$ к виду $\frac{(2(x^2+ax)-1)(x^2+ax-1)}{x^2+ax}=0$. Числитель и знаменатель этого уравнения не обращаются в нуль одновременно. Следовательно, оно равносильно уравнению $(2x^2+2ax-1)(x^2+ax-1)=0$. Квадратные трёхчлены $2x^2+2ax-1$ и x^2+ax-1 не обращаются в нуль одновременно, их коэффициенты при x^2 положительны, а свободные члены отрицательны, следовательно, каждый из этих трёхчленов при всех значениях a имеет ровно по одному положительному корню, причём эти корни различны. Положим $f(x)=2x^2+2ax-1$ и $g(x)=x^2+ax-1$. Так как $f(0)=g(0)=-1<0$, уравнение $f(x)\cdot g(x)=0$ будет иметь единственное решение на отрезке $[0;1]$ тогда и только тогда, когда либо $f(1)\ge 0$ и $g(1)<0$, либо $f(1)<0$ и $g(1)\ge 0$, то есть когда значения параметра a удовлетворяют системе
$$\begin{cases}1+2a\ge 0,\\ a<0\end{cases}\text{ или системе }\begin{cases}1+2a<0,\\ a\ge 0.\end{cases}$$
Вторая из этих систем не имеет решений. Значит, уравнение $2(x^2+ax)+\frac{1}{x^2+ax}-3=0$ имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$ при $-0{,}5\le a<0$.
Ответ: $-0{,}5\le a<0$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение $a=0$ или не содержит значение $a=-0{,}5$	3
С помощью верного рассуждения проведено исследование возможного значения корней уравнения $(2x^2+2ax-1)(x^2+ax-1)=0$, но из-за вычислительной ошибки получены неверные значения a	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения $(2x^2+2ax-1)(x^2+ax-1)=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно.

а) Существует ли такое натуральное число n , что $K(n)=2S(n)+7$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n)=3S(n)+7$?

в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n)=8S(n)+65$?

<u>Решение.</u>

а) Такое число существует. Например, при $n=14$ имеем $S(n)=5$ и $K(n)=17=2\cdot5+7$.

б) Предположим, что такое число существует. Тогда если число $S(n)$ чётное, то число $K(n)=3S(n)+7$ нечётное. Если же число $S(n)$ нечётное, то число $K(n)=3S(n)+7$ чётное. С другой стороны, любая цифра и её квадрат имеют одинаковую чётность (то есть чётны или нечётны одновременно). Значит, $S(n)$ и $K(n)$ также имеют одинаковую чётность. Пришли к противоречию.

в) Пусть n — искомое число, k — количество всех его цифр, m — количество всех девяток в десятичной записи числа n. Тогда сумма всех отличных от девятки цифр числа n равна $S(n)-9m$, а сумма их квадратов не более $8(S(n)-9m)$. Значит, $8S(n)+65=K(n)\le 81m+8(S(n)-9m))=8S(n)+9m$. Следовательно, $m\ge 8$.

Искомое число n является наименьшим натуральным из удовлетворяющих равенству $K(n)=8S(n)+65$, поэтому среди его цифр нет нулей (иначе их можно было бы вычеркнуть) и все его цифры расположены по возрастанию (иначе перестановкой цифр n можно было бы уменьшить). Значит, все девятки в десятичной записи числа n стоят в конце.

Из равенства $K(n)=8S(n)+65$ следует, что либо $S(n)$, либо $K(n)$ не делится на 9 и в числе n есть отличные от девяток цифры. Поэтому $n\ge 199\,999\,999$. При этом $K(199\,999\,999)=649=8\cdot73+65=8S(199\,999\,999)+65$. Значит, число $n=199\,999\,999$ и есть искомое.

Ответ: а) Да; б) нет; в) $199\,999\,999$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4