Тренировочная работа №1 по МАТЕМАТИКЕ
10 класс
28 января 2021 года
Вариант МА2000310
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа включает в себя 19 заданий и состоит из двух частей.

Ответом в заданиях части 1 (1–12) является целое число или десятичная дробь. Запишите ответ в отведённом для него месте на листе с заданиями.

В заданиях части 2 (13–19) требуется записать полное решение на отдельном чистом листе.

При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором.

При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут.

Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий. Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

Желаем успеха!

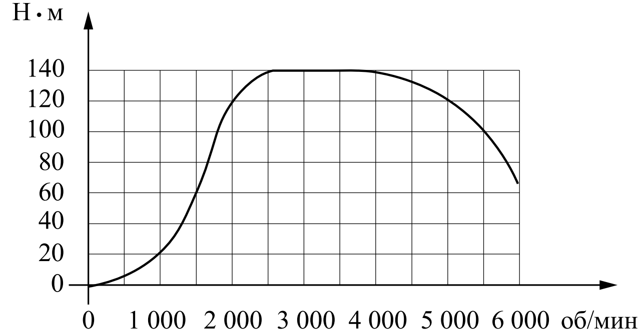
Часть 1

В заданиях 1–12 дайте ответ в виде целого числа, или десятичной дроби, или последовательности цифр.

1 Рост человека 5 футов 11 дюймов. Выразите его рост в сантиметрах, если 1 фут равен 12 дюймам. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

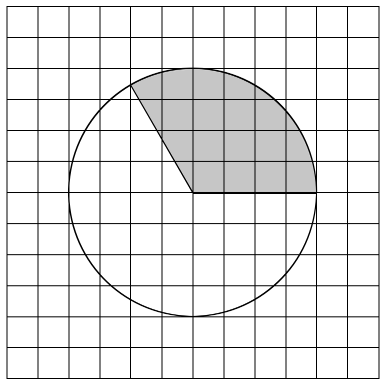
Ответ: ___________________________.

2 На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н·м. Чему равен крутящий момент (в Н·м), если двигатель делает 5500 оборотов в минуту?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге изображён круг площадью 30. Найдите площадь заштрихованного сектора.



Ответ: ___________________________.

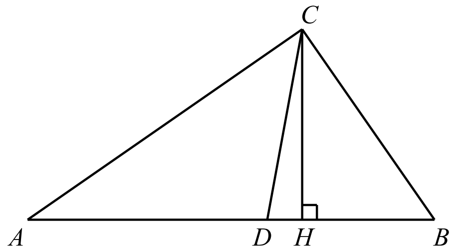
4 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 5, но не дойдя до отметки 8.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $(x-13)^2=-52x$.

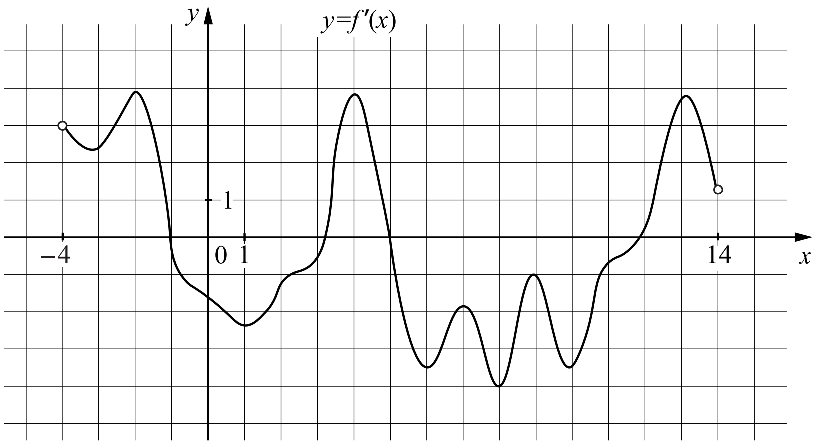
Ответ: ___________________________.

6 Один из углов прямоугольного треугольника равен $53°$. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



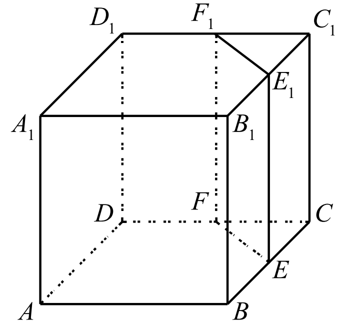
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4;14)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[0;13]$.



Ответ: ___________________________.

8 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 14. Найдите объём куба.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}$.

Ответ: ___________________________.

10 К источнику с ЭДС $\varepsilon=105$ В и внутренним сопротивлением $r=0{,}9$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U=\frac{\varepsilon R}{R+r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 100 В? Ответ выразите в омах.

Ответ: ___________________________.

11 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 40 минут, второй и третий — за 45 минут, а первый и третий — за 2 часа. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=(x+6)^2(x+3)-3$ на отрезке $[-6;1]$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

В заданиях 13–19 запишите полное решение на отдельном чистом листе.

13 а) Решите уравнение $\cos^2\frac{x}{4}-\sin^2\frac{x}{4}=\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; 8\pi\right]$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB=8$, $AD=15$, $AA_1=12$.

а) Докажите, что плоскость DBB_1 образует равные углы с плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

б) Найдите угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

15 Решите неравенство $\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x+7}\ge\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x+5}$.

16 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и BC в точках E и F соответственно. Известно, что точки A, E, F и C лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, на которой лежат точки A, E, F и C, если $AC=2$ и $BC=5$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что на восьмой месяц кредитования выплата составит 33 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4(x^2+ax)+\frac{1}{x^2+ax}=4$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-1;1\right]$.

19 Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n)=2S(n)+3$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n)=3S(n)+3$?

в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n)=8S(n)+56$?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2000309-2000310 (профильный уровень) от 28.01.2021

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2000309	196	120	30	0,5	- 14	20	3	200	- 9	18	20	10
2000310	180	100	10	0,25	- 13	8	2	112	2	18	36	- 7

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\cos^2\dfrac{x}{4}-\sin^2\dfrac{x}{4}=\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; 8\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos x-\cos\frac{x}{2}=0;\quad 2\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}-1=0.$$

Значит, $\cos\dfrac{x}{2}=1$ или $\cos\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{2}$, следовательно, $x=4\pi n$ или $x=\pm\dfrac{4\pi}{3}+4\pi k$, где $n,k\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; 8\pi\right]$:

$$5\pi\le 4\pi n\le 8\pi;\ 1{,}25\le n\le 2;\ n=2;\ x=8\pi;$$

$$5\pi\le\frac{4\pi}{3}+4\pi k\le 8\pi;\ \frac{11}{12}\le k\le\frac{5}{3};\ k=1;\ x=\frac{16\pi}{3};$$

$$5\pi\le-\frac{4\pi}{3}+4\pi k\le 8\pi;\ \frac{19}{12}\le k\le\frac{7}{3};\ k=2;\ x=\frac{20\pi}{3}.$$

Получим числа $\dfrac{16\pi}{3}$; $\dfrac{20\pi}{3}$; 8π.

Ответ: а) $4\pi n$, $\pm\dfrac{4\pi}{3}+4\pi k$, где $n,k\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{16\pi}{3}$; $\dfrac{20\pi}{3}$; 8π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB=8$, $AD=15$, $AA_1=12$.

а) Докажите, что плоскость DBB_1 образует равные углы с плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

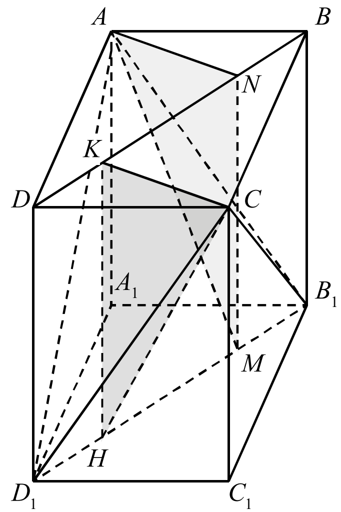
б) Найдите угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

Решение.

а) В треугольниках CD_1B_1 и AD_1B_1 проведём высоты CH и AM.

Через точки H и M проведём отрезки HK и MN, перпендикулярные плоскостям оснований параллелепипеда. Поскольку наклонные CH и AM перпендикулярны прямой DB, их проекции KC и AN тоже перпендикулярны прямой DB, а следовательно, KC и AN равны между собой.

Прямоугольные треугольники HCK и MAN равны по двум катетам, поэтому $\angle KHC=\angle NMA$, т. е. плоскость DBB_1 образует равные углы с плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.



б) Угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1 равен сумме углов, которые плоскость DBB_1 образует с плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

Из треугольника DCB находим, что $BD=17$; $CK=\dfrac{DC\cdot CB}{DB}$; $CK=\dfrac{15\cdot 8}{17}=\dfrac{120}{17}$.

Из треугольника KHC находим, что $\operatorname{tg}\angle KHC=\dfrac{CK}{KH}$; $\operatorname{tg}\angle KHC=\dfrac{120}{17\cdot 12}=\dfrac{10}{17}$; $\angle KHC=\operatorname{arctg}\dfrac{10}{17}$.

Поэтому угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1 равен $2\operatorname{arctg}\dfrac{10}{17}$.

Ответ: б) $2\operatorname{arctg}\dfrac{10}{17}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x+7} \geq \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x+5}$.

Решение.

Имеем $12+x-x^2 \geq 0$; $(x-4)(x+3) \leq 0$, следовательно, $-3 \leq x \leq 4$.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\sqrt{12+x-x^2}\left(\frac{1}{2x+7}-\frac{1}{x+5}\right) \geq 0;\ \sqrt{12+x-x^2}\left(\frac{x+2}{(2x+7)(x+5)}\right) \leq 0.$$

Получаем $-3 \leq x \leq -2$ и $x=4$.

Ответ: $[-3;-2]$; 4.

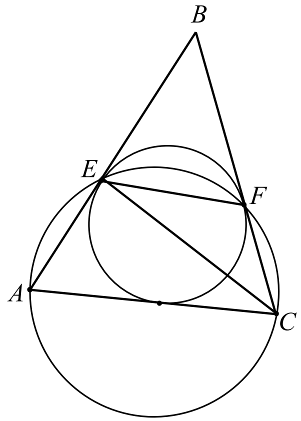
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и BC в точках E и F соответственно. Известно, что точки A, E, F и C лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, на которой лежат точки A, E, F и C, если $AC=2$ и $BC=5$.

Решение.



а) Поскольку $EB=BF$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки, треугольник EBF равнобедренный. Значит, $\angle BEF=\angle BFE$, а потому равны и смежные с ними углы: $\angle AEF=\angle CFE$. Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна $180°$, поэтому $\angle BAC=180°-\angle CFE=180°-\angle AEF=\angle BCA$, то есть треугольник ABC равнобедренный с основанием AC.

б) В треугольнике ABC известны стороны $AB=BC=5$ и $AC=2$. Прямая EF параллельна прямой AC. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки, $AE=CF=\frac{1}{2}AC=1$.

Пусть $\angle BAC=\alpha$, тогда $\cos\alpha=\frac{AC}{2\cdot AB}=\frac{1}{5}$ и $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Радиус описанной около трапеции $AEFC$ окружности найдём из треугольника AEC по теореме синусов: $R=\frac{EC}{2\sin\alpha}$. Длину EC найдём по теореме косинусов: $EC=\sqrt{1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos\alpha}=\sqrt{\frac{21}{5}}$. Таким образом, $R=\sqrt{\frac{21}{5}}:\frac{4\sqrt{6}}{5}=\frac{\sqrt{35}}{4\sqrt{2}}$.

Ответ: б) $\frac{\sqrt{70}}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что на восьмой месяц кредитования выплата составит 33 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

Решение.
Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:
$S;\ \frac{14S}{15};\ \ldots;\ \frac{2S}{15};\ \frac{S}{15};\ 0.$
Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:
$1{,}03S;\ 1{,}03\cdot\frac{14S}{15};\ \ldots;\ 1{,}03\cdot\frac{2S}{15};\ 1{,}03\cdot\frac{S}{15}.$
Следовательно, выплаты должны быть следующими:
$0{,}03S+\frac{S}{15};\ \frac{14\cdot 0{,}03S+S}{15};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}03S+S}{15};\ \frac{0{,}03S+S}{15}.$
На восьмой месяц выплата составит $\frac{8\cdot 0{,}03\cdot S+S}{15}=\frac{1{,}24S}{15}$. А всего следует выплатить
$$S+S\cdot 0{,}03\left(1+\frac{14}{15}+\ldots+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}\right)=S\left(1+\frac{16\cdot 0{,}03}{2}\right)=1{,}24S.$$
Значит, банку нужно вернуть $33000\cdot 15=495000$ рублей.
Ответ: 495 000 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение
$$4(x^2+ax)+\frac{1}{x^2+ax}=4$$
имеет единственное решение на отрезке $[-1;1]$.

Решение.
Приводя к общему знаменателю и пользуясь формулой квадрата разности, преобразуем уравнение $4(x^2+ax)+\frac{1}{x^2+ax}=4$ к виду $\frac{(2(x^2+ax)-1)^2}{x^2+ax}=0$.
Числитель и знаменатель этого уравнения не обращаются в нуль одновременно. Следовательно, оно равносильно уравнению $2x^2+2ax-1=0$. Поскольку дискриминант последнего уравнения равен $4a^2+8>0$, оно при всех значениях a имеет ровно два различных решения. Положим $f(x)=2x^2+2ax-1$. Так как $f(0)=-1<0$, уравнение $f(x)=0$ будет иметь единственное решение на отрезке $[-1;1]$ тогда и только тогда, когда либо $f(-1)\ge 0$ и $f(1)<0$, либо $f(-1)<0$ и $f(1)\ge 0$, то есть когда значения параметра a удовлетворяют системе
$$\begin{cases}1-2a\ge 0,\\1+2a<0\end{cases}\text{ или системе }\begin{cases}1-2a<0,\\1+2a\ge 0.\end{cases}$$
Значит, уравнение $4(x^2+ax)+\frac{1}{x^2+ax}=4$ имеет единственное решение на отрезке $[-1;1]$ при $a<-0{,}5$ или $a>0{,}5$.
Ответ: $a<-0{,}5$; $a>0{,}5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *a*, но ответ содержит лишние значения $a=-0{,}5$ или $a=0{,}5$	3
С помощью верного рассуждения проведено исследование возможного значения корней уравнения $2x^2+2ax-1=0$, но из-за вычислительной ошибки получены неверные значения *a*	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения $2x^2+2ax-1=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n)=2S(n)+3$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n)=3S(n)+3$?

в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n)=8S(n)+56$?

__**Решение.**__

а) Такое число существует. Например, при $n=23$ имеем $S(n)=5$ и $K(n)=13=2\cdot 5+3$.

б) Предположим, что такое число существует. Тогда если число $S(n)$ чётное, то число $K(n)=3S(n)+3$ нечётное. Если же число $S(n)$ нечётное, то число $K(n)=3S(n)+3$ чётное. С другой стороны, любая цифра и её квадрат имеют одинаковую чётность (то есть чётны или нечётны одновременно). Значит, $S(n)$ и $K(n)$ также имеют одинаковую чётность. Пришли к противоречию.

в) Пусть n — искомое число, k — количество всех его цифр, m — количество всех девяток в десятичной записи числа n. Тогда сумма всех отличных от девятки цифр числа n равна $S(n)-9m$, а сумма их квадратов не более $8(S(n)-9m)$. Значит, $8S(n)+56=K(n)\le 81m+8(S(n)-9m))=8S(n)+9m$. Следовательно, $m\ge 7$.

Искомое число n является наименьшим натуральным из удовлетворяющих равенству $K(n)=8S(n)+56$, поэтому среди его цифр нет нулей (иначе их можно было бы вычеркнуть) и все его цифры расположены по возрастанию (иначе перестановкой цифр n можно было бы уменьшить). Значит, все девятки в десятичной записи числа n стоят в конце.

Из равенства $K(n)=8S(n)+56$ следует, что либо $S(n)$, либо $K(n)$ не делится на 9 и в числе n есть отличные от девяток цифры. Поэтому $n\ge 19\,999\,999$. При этом $K(19\,999\,999)=568=8\cdot 64+56=8S(19\,999\,999)+56$. Значит, число $n=19\,999\,999$ и есть искомое.

Ответ: а) Да; б) нет; в) $19\,999\,999$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4