Тренировочная работа №4 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
11 марта 2020 года
Вариант МА1910411
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

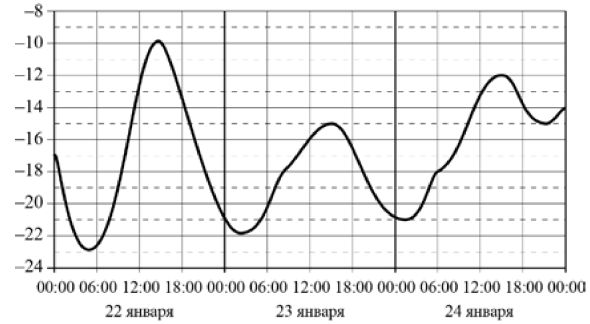
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 110 рублей за штуку и продаёт с наценкой 20 %. Какое наибольшее количество таких горшков можно купить в этом магазине на 1100 рублей?

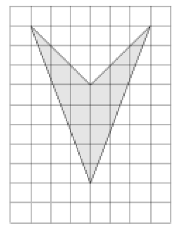
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурами воздуха 24 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

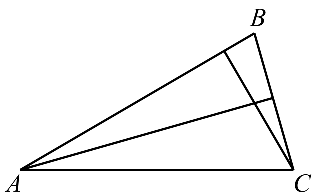
4 Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шахматистов, среди которых 18 спортсменов из России, в том числе Фёдор Волков. Найдите вероятность того, что в первом туре Фёдор Волков будет играть с каким-либо шахматистом из России.

Ответ: ___________________________.

5 Решите уравнение $\log_{x-5} 9 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

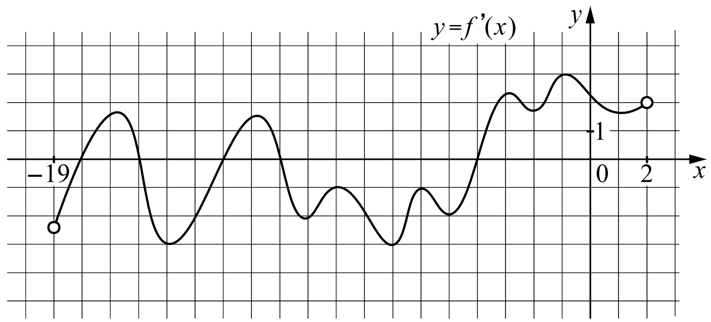
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике со сторонами 6 и 4 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 2. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?



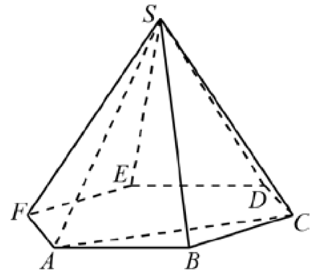
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-19;2)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-17;1]$.



Ответ: ___________________________.

8 Объём треугольной пирамиды *SABC*, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF*, равен 8. Найдите объём шестиугольной пирамиды.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{18\left(\sin^2 24° - \cos^2 24°\right)}{\cos 48°}$.

Ответ: ___________________________.

10 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 5$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{1000}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с^2). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Ответ: ___________________________.

11 Два велосипедиста одновременно отправились в 153-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 8 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 8 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x+7$ на отрезке $[140;145]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $6\cos^2 x-5\sin x=2$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

14 В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 3 и радиусом основания 8 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.
а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

15 Решите неравенство

$$\log_{16}(x+5)+\log_{\left(x^2+10x+25\right)}2\ge\frac{3}{4}.$$

16 В треугольнике ABC проведена медиана CM, а в треугольниках AMC и BMC — биссектрисы MP и MQ соответственно.
а) Докажите, что отрезок PQ параллелен стороне AB.
б) Найдите площадь треугольника MPQ, если $AC=5$, $BC=12$, $CM=\frac{13}{2}$.

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(2x+a+1-\operatorname{tg}x)^2=(2x+a-1+\operatorname{tg}x)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;\ \pi]$.

19 а) Может ли десятичная запись произведения трёх последовательных трёхзначных чисел оканчиваться на 250?
б) Может ли десятичная запись произведения трёх последовательных трёхзначных чисел оканчиваться на 8750?
в) Найдите все такие натуральные числа n, что каждое из чисел n, $n+1$ и $n+2$ трёхзначное, а десятичная запись их произведения $n(n+1)(n+2)$ оканчивается на 4000.

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 1910409-1910412 (профильный уровень) от 11.03.2020

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1910409	23	17400	12	0,16	- 2	76	4	289	- 8	2	25	36
1910410	7	24100	15	0,17	1,5	45	- 3	676	23	3	24	100
1910411	8	9	15	0,68	8	3	2	48	- 18	500	17	295
1910412	6	14	24	0,64	- 3	5	1	150	- 15	200	16	255

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

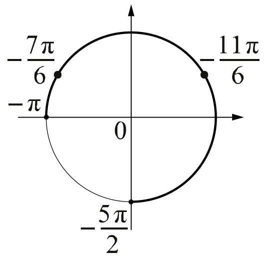
13

а) Решите уравнение $6\cos^2 x - 5\sin x = 2$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение: $6 - 6\sin^2 x - 5\sin x = 2$. Сделаем замену $y = \sin x$. Получаем $6y^2 + 5y - 4 = 0$, откуда $y = \frac{1}{2}$ или $y = -\frac{4}{3}$. Отбрасывая корень, меньший минус единицы, получаем $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.



Получим $x = -\frac{11\pi}{6}$ или $x = -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

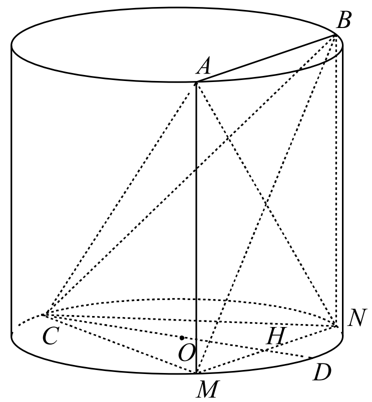
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 3 и радиусом основания 8 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.
а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

Решение.

а) Для построения сечения опустим перпендикуляры AM и BN на второе основание цилиндра. Отрезки AM и BN параллельны и равны, значит, $ABNM$ — параллелограмм. Так как прямые AM и BN перпендикулярны основаниям цилиндра и, в частности, прямой AB, параллелограмм $ABNM$ является прямоугольником. Отрезки AN и BM равны как диагонали прямоугольника, что и требовалось доказать.



б) Площадь прямоугольника $ABNM$ равна $3 \cdot 8 = 24$. Пусть H — точка пересечения отрезков NM и CD. Отрезок OH равен $\sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$. Высота CH пирамиды $CABNM$ равна $8 + 4\sqrt{3}$. Следовательно, объём пирамиды $CABNM$ равен

$$\frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \left(8 + 4\sqrt{3}\right) = 64 + 32\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $64 + 32\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\log_{16}(x+5)+\log_{(x^2+10x+25)}2\geq\frac{3}{4}.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{1}{4}\log_2(x+5)+\frac{1}{2}\log_{(x+5)}2\geq\frac{3}{4}.$$

Пусть $\log_2(x+5)=y$, тогда

$$\frac{y}{4}+\frac{1}{2y}-\frac{3}{4}\geq 0;$$

$$\frac{y^2+2-3y}{4y}\geq 0;\quad \frac{(y-2)(y-1)}{4y}\geq 0;\quad 0<y\leq 1,\text{ или } y\geq 2.$$

Следовательно,

$$0<\log_2(x+5)\leq 1 \text{ или } \log_2(x+5)\geq 2$$

Из первого неравенства находим

$1<x+5\leq 2$, то есть $-4<x\leq -3$.

Из второго неравенства находим

$x+5\geq 4$, то есть $x\geq -1$.

Ответ: $-4<x\leq -3$; $x\geq -1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

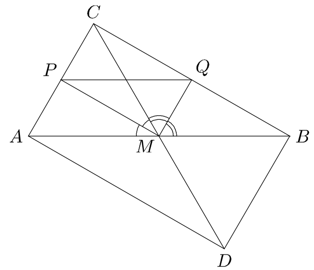
16 В треугольнике ABC проведена медиана CM, а в треугольниках AMC и BMC — биссектрисы MP и MQ соответственно.

а) Докажите, что отрезок PQ параллелен стороне AB.

б) Найдите площадь треугольника MPQ, если $AC=5$, $BC=12$, $CM=\frac{13}{2}$.

Решение.

а) По свойству биссектрисы $\frac{AP}{PC}=\frac{AM}{MC}$ и $\frac{BQ}{QC}=\frac{BM}{MC}$. Так как $AM=BM$, получаем, что $\frac{AP}{PC}=\frac{BQ}{QC}$, а значит, прямые PQ и AB параллельны.



б) Достроим треугольник ABC до параллелограмма, как показано на рисунке. Поскольку в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон, получаем, что $2\cdot AC^2+2\cdot BC^2=AB^2+CD^2$, откуда $AB^2=13^2$, и треугольник ABC прямоугольный с прямым углом ACB. Поскольку $AB=13$ и $MB=\frac{13}{2}$, биссектриса MQ является медианой и высотой в равнобедренном треугольнике CMB. Аналогично MP — медиана и высота в равнобедренном треугольнике AMC. Значит, точки P, M, Q — середины сторон треугольника ABC и $\frac{S_{PMQ}}{S_{ABC}}=\frac{1}{4}$. Поскольку $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12=30$, получаем, что $S_{PMQ}=\frac{15}{2}$.

Ответ: б) 7,5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.
Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10 %, т. е. увеличивается в 1,1 раза. Поэтому через три года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1{,}1^3 S = 1{,}331S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1{,}08\left(1+\frac{n}{100}\right)^2 S,$$

где n — некоторое натуральное число процентов.
По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1{,}08\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)^2 S > 1{,}331S;$$

$$\left(1+\frac{n}{100}\right)^2 > \frac{1331}{1080} = 1{,}2324...$$

При $n = 12$ неравенство

$$1{,}12^2 > 1{,}2324...;\quad 1{,}2544 > 1{,}2324...$$

верно, а при $n = 11$ неравенство

$$1{,}11^2 > 1{,}2324...;\quad 1{,}2321 > 1{,}2324...$$

неверно, как и при всех меньших n.
Ответ: 12.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(2x+a+1-\operatorname{tg}x)^2 = (2x+a-1+\operatorname{tg}x)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;\ \pi]$.

Решение.
Преобразуем уравнение:

$$(2x+a+1-\operatorname{tg}x)^2 - (2x+a-1+\operatorname{tg}x)^2 = 0;$$

$(2-2\operatorname{tg}x)(4x+2a) = 0$, откуда

$\operatorname{tg}x = 1$ или $x = -\frac{a}{2}$ при условии, что $-\frac{a}{2} \ne \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Уравнение $\operatorname{tg}x = 1$ имеет $[0;\ \pi]$ на отрезке единственный корень $x = \frac{\pi}{4}$.

Число $\frac{\pi}{2}+\pi k$ принадлежит отрезку $[0;\ \pi]$ при $k = 0$; в этом случае оно равно $\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение на отрезке $[0;\ \pi]$, только если число $-\frac{a}{2}$ находится вне отрезка $[0;\ \pi]$, или совпадает с $\frac{\pi}{4}$, или совпадает с $\frac{\pi}{2}$, то есть $-\frac{a}{2} < 0$, $-\frac{a}{2} > \pi$; $-\frac{a}{2} = \frac{\pi}{2}$ или $-\frac{a}{2} = \frac{\pi}{4}$, откуда $a < -2\pi$, $a = -\pi$; $a = -\frac{\pi}{2}$ или $a > 0$.

Ответ: $a < -2\pi$; $a = -\pi$; $a = -\frac{\pi}{2}$; $a > 0$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *a*, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 а) Может ли десятичная запись произведения трёх последовательных трёхзначных чисел оканчиваться на 250?
б) Может ли десятичная запись произведения трёх последовательных трёхзначных чисел оканчиваться на 8750?
в) Найдите все такие натуральные числа n, что каждое из чисел n, $n+1$ и $n+2$ трёхзначное, а десятичная запись их произведения $n(n+1)(n+2)$ оканчивается на 4000.

Решение.
а) Да. Например,

$$125\cdot126\cdot127=125\cdot(8\cdot16-2)\cdot(8\cdot16-1)=1000\cdot(8\cdot16^2-3\cdot16)+250.$$

Значит, десятичная запись этого произведения оканчивается на 250.
б) Нет. Предположим, что десятичная запись произведения $p=n(n+1)(n+2)$ некоторых трёхзначных чисел n, $n+1$ и $n+2$ оканчивается на 8750. Тогда для некоторого натурального числа k имеем $p=k\cdot10^4+8750=2\cdot5^4\cdot(8k+7)$. Поскольку из чисел n, $n+1$ и $n+2$ только одно может делиться на 5, именно это число должно делиться и на $5^4=625$. Есть лишь одно такое трёхзначное число — это 625. Значит, либо $n=623$, либо $n=624$, либо $n=625$. В первых двух случаях p делится на 4, что противоречит равенству $p=2\cdot5^4\cdot(8k+7)$. Если $n=625$, то $p=625\cdot626\cdot627=2\cdot5^4\cdot313\cdot627$. Это также противоречит равенству $p=2\cdot5^4\cdot(8k+7)$, так как число $313\cdot627$ даёт остаток 3 при делении на 8.
в) Пусть число n искомое. Тогда десятичная запись произведения $p=n(n+1)(n+2)$ оканчивается на 4000. Это происходит тогда и только тогда, когда для некоторого натурального числа k выполнимо равенство $p=k\cdot10^4+4000=2^4\cdot5^3\cdot(5k+2)$. Поскольку из чисел n, $n+1$ и $n+2$ только одно может делиться на 5, именно это число должно делиться и на $5^3=125$. Значит, либо $n=125m$, либо $n=125m-1$, либо $n=125m-2$ для некоторого

числа m = 1, 2, ..., 7. Поскольку произведение p делится на $2^4=16$, а среди чисел n, $n+1$ и $n+2$ не более двух чётных и не более одного кратного 4, получаем, что одно из этих чисел должно делиться на 8. Следовательно, число n при делении на 8 должно давать в остатке 0, 6 или 7.
Рассмотрим случай $n=125m$ (m = 1, 2, ..., 7). Нужный остаток при делении на 8 будет лишь при $m=3$ и $m=6$. При $m=3$ произведение $p=375\cdot376\cdot377$ не делится на 16. При $m=6$ имеем $p=750\cdot751\cdot752=2^4\cdot5^3\cdot(3\cdot751\cdot94)$. Число $3\cdot751\cdot94$ действительно даёт при делении на 5 остаток 2. Значит, число $n=750$ — одно из искомых.
Рассмотрим случай $n=125m-1$ (m = 1, 2, ..., 7). Нужный остаток при делении на 8 будет лишь при $m=3$ и $m=5$. При $m=3$ имеем $p=374\cdot375\cdot376=2^4\cdot5^3\cdot(187\cdot3\cdot47)$. Число $187\cdot3\cdot47$ действительно даёт при делении на 5 остаток 2. Значит, число $n=374$ — одно из искомых. При $m=5$ произведение $p=624\cdot625\cdot626$ делится на $625=5^4$, противоречие.
Наконец, рассмотрим случай $n=125m-2$ ($m=1,2,...,7$). Нужный остаток при делении на 8 будет лишь при $m=2$ и $m=5$. При $m=2$ имеем $p=248\cdot249\cdot250=2^4\cdot5^3\cdot(31\cdot249)$. Число $31\cdot249$ не даёт при делении на 5 остаток 2, противоречие. При $m=5$ произведение $p=623\cdot624\cdot625$ делится на $625=5^4$, противоречие.
Следовательно, все искомые числа n — это 374 и 750.
Ответ: а) Да; б) нет; в) 374 и 750.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4