

**Тренировочная работа №5 по МАТЕМАТИКЕ****11 класс**29 апреля 2021 года  
Вариант МА2010511  
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО \_\_\_\_\_ класс \_\_\_\_\_

**Инструкция по выполнению работы**

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

*Желаем успеха!***Справочные материалы**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

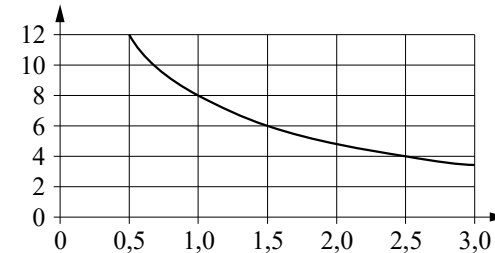
**Часть 1**

*Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.*

- 1 В сентябре 1 кг клубники стоил 120 рублей. В октябре клубника подорожала на 10 %. Сколько рублей стал стоить 1 кг клубники после подорожания в октябре?

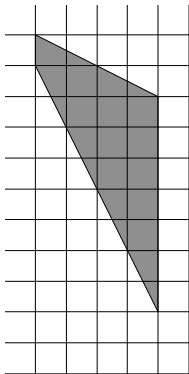
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2 Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя: чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На графике показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На горизонтальной оси отмечено сопротивление в омах, на вертикальной оси — сила тока в амперах. Определите по графику, на сколько ампер уменьшилась сила тока при увеличении сопротивления с 1,5 ома до 2,5 ома.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ: \_\_\_\_\_.

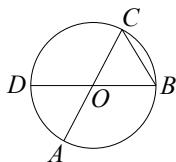
- 4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7. Результат округлите до сотых.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 5 Найдите корень уравнения  $\sqrt{\frac{8}{3x-43}} = \frac{1}{4}$ .

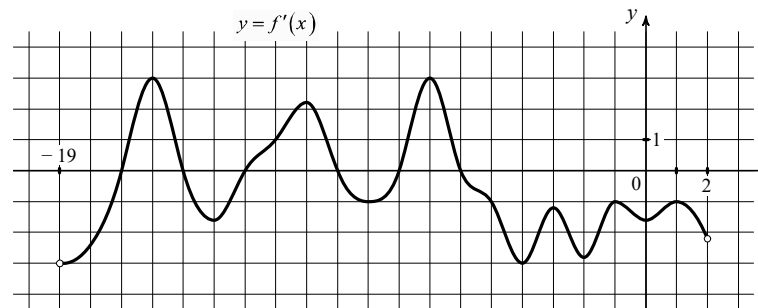
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 6 Отрезки  $AC$  и  $BD$  — диаметры окружности с центром  $O$ . Угол  $ACB$  равен  $49^\circ$ . Найдите угол  $AOD$ . Ответ дайте в градусах.



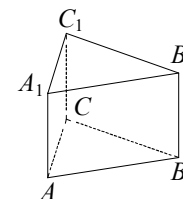
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-19; 2)$ . Найдите количество точек максимума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-16; 0]$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки  $B, C, A_1, C_1$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 2.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**Часть 2**

- 9 Найдите значение выражения  $\log_7 12,25 + \log_7 4$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 Водолазный колокол, в начальный момент времени содержащий  $\nu = 2$  моля воздуха объёмом  $V_1 = 9$  л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма  $V_2$ . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением  $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ , где  $\alpha = 17,8 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  — постоянная, а  $T = 300$  К — температура воздуха. Найдите, какой объём  $V_2$  (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии воздуха была совершена работа в 10 680 Дж.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11 Моторная лодка прошла против течения реки 192 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 14 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 12 Найдите точку минимума функции  $y = 7^{x^2 - 6x + 13}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.*

- 13 а) Решите уравнение  $\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4} = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

- 14 Точка  $O$  — центр основания  $ABCDEF$  правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$ . Точки  $K, L, M, T$  — середины отрезков  $AF, SF, SD, MK$  соответственно.

а) Докажите, что точка  $T$  лежит на отрезке  $LO$ .

б) Найдите  $CT$ , если сторона основания пирамиды равна 4, а высота пирамиды равна 48.

- 15 Решите неравенство  $\frac{2}{\log_2(2x-2)} + \frac{3}{\log_2(4x-4)} \leq \frac{8}{\log_3 27 + \log_2(x-1)}$ .

- 16 В параллелограмме  $ABCD$  расположены две равные непересекающиеся окружности. Первая касается сторон  $AD, AB$  и  $BC$ , вторая — сторон  $AD, CD$  и  $BC$ .

а) Докажите, что общая внутренняя касательная  $l$  окружностей проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ .

б) Пусть  $ABCD$  — прямоугольник, а прямая  $l$  касается окружностей в точках  $M$  и  $N$ . Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках  $M, N$  и в центрах окружностей, если  $AD = 16$ , а расстояние между центрами окружностей равно 10.

- 17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составит общая сумма выплат после погашения кредита?

- 18 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x-3} \cdot \ln(5x-a) = \sqrt{4x-3} \cdot \ln(6x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке  $[0; 1]$ .

- 19 На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 8, если изначально по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 39, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 199 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 199 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

[math100.ru](http://math100.ru)

Ответы на тренировочные варианты 2010509-2010512 (профильный уровень) от  
29.04.2021

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2010509	211	12	4	0,64	12	15	2	3	- 5	18	3	- 51
2010510	173	15	12	0,04	7	5	2	4	1,5	21	27	- 20
2010511	132	2	16	0,17	57	82	3	4	2	4,5	2	3
2010512	92	40	8	0,14	17	86	2	9	5	10,5	3	- 2

Видео разбор 13-18 заданий варианта 2010509 и 2010511

13	
14	
15	
16	
17	
18	

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

**13**

- а) Решите уравнение  $\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4} = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$ .
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

**Решение.**

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos x + \cos \frac{x}{2} = 0; \quad 2\cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} - 1 = 0.$$

Значит,  $\cos \frac{x}{2} = -1$ , откуда  $x = 2\pi + 4\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , или  $\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ , откуда  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

б) Найдём корни, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

Решая три неравенства

$$\frac{5\pi}{2} \leq 2\pi + 4\pi n \leq 4\pi; \quad \frac{5\pi}{2} \leq -\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leq 4\pi \quad \text{и} \quad \frac{5\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leq 4\pi,$$

получим число  $\frac{10\pi}{3}$ .

**Ответ:** а)  $2\pi + 4\pi n, \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{10\pi}{3}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**14**

Точка  $O$  — центр основания  $ABCDEF$  правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$ . Точки  $K, L, M, T$  — середины отрезков  $AF, SF, SD, MK$  соответственно.

- а) Докажите, что точка  $T$  лежит на отрезке  $LO$ .
- б) Найдите  $CT$ , если сторона основания пирамиды равна 4, а высота пирамиды равна 48.

**Решение.**

а) В треугольнике  $FSD$  отрезок  $LM$  — средняя линия, поэтому прямые  $LM$  и  $FD$  параллельны и  $LM = \frac{FD}{2}$ .

Плоскости  $KLM$  и  $ABC$  пересекаются по прямой  $KN$ , которая параллельна прямой  $LM$  и проходит через точку  $O$ .

Поскольку  $KN = FD$ , то  $LM = \frac{KN}{2}$ .

Таким образом,  $LM = KO$ , а  $T$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма  $KLMO$ .

Следовательно,  $T$  — середина  $LO$ , а значит, точка  $T$  лежит на  $LO$ .

б) Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью  $SCF$ , в которой лежит отрезок  $CT$ .

В треугольнике  $SCF$  отрезок  $LO$  — средняя линия. Проведём перпендикуляр  $TH$  из точки  $T$  на прямую  $FC$ .

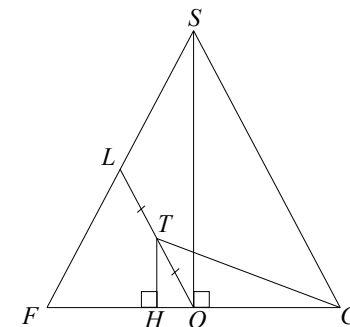
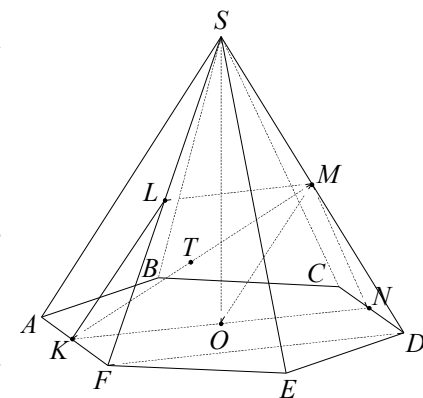
Треугольники  $TOH$  и  $SCO$  подобны, следовательно,  $TH = \frac{SO}{4}$  и  $HO = \frac{OC}{4}$ .

$$HC = HO + OC = \frac{5OC}{4} = \frac{5BC}{4};$$

$$TC = \sqrt{TH^2 + HC^2} = \sqrt{\frac{SO^2}{16} + \frac{25BC^2}{16}} = \sqrt{144 + 25} = 13.$$

**Ответ:** 13.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте б, возможно, с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2



**15** Решите неравенство  $\frac{2}{\log_2(2x-2)} + \frac{3}{\log_2(4x-4)} \leq \frac{8}{\log_3 27 + \log_2(x-1)}$ .

**Решение.**

Преобразуем неравенство

$$\frac{2}{1 + \log_2(x-1)} + \frac{3}{2 + \log_2(x-1)} \leq \frac{8}{3 + \log_2(x-1)}$$

Пусть  $y = 1 + \log_2(x-1)$ .

Решим неравенство  $\frac{2}{y} + \frac{3}{1+y} - \frac{8}{2+y} \leq 0$ :

$$\frac{4 + 4y - 3y^2}{y(y+1)(y+2)} \leq 0; \quad \frac{(y-2)(3y+2)}{y(y+1)(y+2)} \geq 0.$$

Следовательно,  $-2 < y < -1$ , или  $-\frac{2}{3} \leq y < 0$ , или  $y \geq 2$ .

Тогда  $-2 < 1 + \log_2(x-1) < -1$ , или  $-\frac{2}{3} \leq 1 + \log_2(x-1) < 0$ , или  $1 + \log_2(x-1) \geq 2$ .

Таким образом,  $-3 < \log_2(x-1) < -2$ , или  $-1\frac{2}{3} \leq \log_2(x-1) < -1$ , или  $\log_2(x-1) \geq 1$ . Следовательно,  $1\frac{1}{8} < x < 1\frac{1}{4}$ , или  $1 + \frac{1}{2\sqrt[3]{4}} \leq x < 1\frac{1}{2}$ , или  $x \geq 3$ .

**Ответ:**  $(1,125; 1,25)$ ;  $[\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}; 1,5)$ ;  $[3; +\infty)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением одной из крайних точек. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**16** В параллелограмме  $ABCD$  расположены две равные непересекающиеся окружности. Первая касается сторон  $AD$ ,  $AB$  и  $BC$ , вторая — сторон  $AD$ ,  $CD$  и  $BC$ .

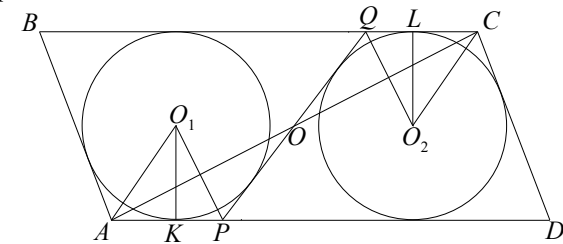
а) Докажите, что общая внутренняя касательная  $l$  окружностей проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ .

б) Пусть  $ABCD$  — прямоугольник, а прямая  $l$  касается окружностей в точках  $M$  и  $N$ . Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках  $M$ ,  $N$  и в центрах окружностей, если  $AD = 16$ , а расстояние между центрами окружностей равно 10.

**Решение.**

а) Пусть  $O$  — точка пересечения диагонали  $AC$  параллелограмма с общей внутренней касательной  $l$  к данным окружностям,  $P$  и  $Q$  — точки пересечения прямой  $l$  со сторонами  $AD$  и  $BC$  соответственно. Достаточно доказать, что  $O$  — середина диагонали  $AC$ .

Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры первой и второй окружностей соответственно. Первая окружность касается стороны  $AD$  в точке  $K$ , вторая окружность касается стороны  $BC$  в точке  $L$ .

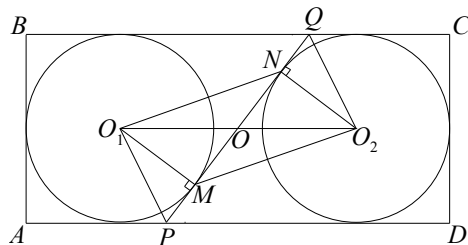


Лучи  $AO_1$  и  $CO_2$  — биссектрисы равных углов  $BAD$  и  $BCD$ , значит, прямоугольные треугольники  $AKO_1$  и  $CLO_2$  равны по катету (радиусы равных окружностей) и противолежащему острому углу. Тогда  $AK = CL$ . Аналогично  $KP = LQ$ . Следовательно,  $AP = AK + KP = CL + LQ = CQ$ .

Значит, треугольники  $AOP$  и  $COQ$  равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому  $AO = OC$ , а точка  $O$  — середина диагонали  $AC$ , то есть центр параллелограмма  $ABCD$ .

б) Поскольку  $ABCD$  — прямоугольник, его сторона  $AD$  равна сумме диаметра окружности и отрезка  $O_1O_2$ , то есть  $2r + O_1O_2 = AD$ , или  $2r + 10 = 16$ , следовательно,  $r = 3$ .

Четырёхугольник  $O_1MO_2N$  — параллелограмм, так как его противоположные стороны  $O_1M$  и  $O_2N$  равны и параллельны. Диагонали  $O_1O_2$  и  $MN$  параллелограмма  $O_1MO_2N$  пересекаются в точке  $O$  и делятся этой точкой пополам.



Площадь параллелограмма  $O_1MO_2N$  в четыре раза больше площади треугольника  $OO_1M$ , в котором

$$OO_1 = \frac{1}{2}O_1O_2 = 5, O_1M = r = 3.$$

По теореме Пифагора

$$OM = \sqrt{OO_1^2 - O_1M^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Следовательно,

$$S_{O_1MO_2N} = 4S_{\square OO_1M} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot OM \cdot O_1M = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24.$$

**Ответ:** б) 24.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> . ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 17** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
  - в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.
- Сколько млн рублей составит общая сумма выплат после погашения кредита?

**Решение.**

По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$8; 7,2; \dots, 1,6; 0,8; 0.$$

По условию каждый январь долг возрастает на 15 %. Значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$9,2; 8,28; \dots, 1,84; 0,92.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$2; 1,88; \dots, 1,04; 0,92.$$

Всего следует выплатить

$$2 + 1,88 + \dots + 1,04 + 0,92 = \frac{10 \cdot 2,92}{2} = 14,6 \text{ (млн рублей).}$$

**Ответ:** 14,6.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sqrt{4x-3} \cdot \ln(5x-a) = \sqrt{4x-3} \cdot \ln(6x+a)$  имеет ровно один корень на отрезке  $[0; 1]$ .

**Решение.**

Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{4x-3} \cdot (\ln(5x-a) - \ln(6x+a)) = 0.$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай:  $\sqrt{4x-3} = 0$  при условии  $\begin{cases} 6x+a > 0, \\ 5x-a > 0. \end{cases}$

Получаем  $x = \frac{3}{4}$ , при условии  $\begin{cases} a + \frac{9}{2} > 0, \\ \frac{15}{4} - a > 0, \end{cases}$  откуда  $-\frac{9}{2} < a < \frac{15}{4}$ .

То есть  $x = \frac{3}{4}$  при  $-\frac{9}{2} < a < \frac{15}{4}$ .

Второй случай:  $\ln(5x-a) - \ln(6x+a) = 0$  при условии  $4x-3 \geq 0$ .

Получаем:  $\ln(5x-a) = \ln(6x+a); \begin{cases} 5x-a = 6x+a, \\ 5x-a > 0, \end{cases}$  откуда  $x = -2a, a < 0$ .

Тогда  $-8a-3 \geq 0$ , откуда  $a \leq -\frac{3}{8}$ . То есть в этом случае  $x = -2a$  при  $a \leq -\frac{3}{8}$ .

Корень уравнения  $x = -2a$  принадлежит отрезку  $[0; 1]$  при  $-\frac{1}{2} \leq a \leq -\frac{3}{8}$ .

Корни уравнения  $x = \frac{3}{4}$  и  $x = -2a$  совпадают при  $a = -\frac{3}{8}$ .

Получаем, что исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке  $[0; 1]$  при  $-\frac{9}{2} < a < -\frac{1}{2}, -\frac{3}{8} \leq a < \frac{15}{4}$ .

**Ответ:**  $-\frac{9}{2} < a < -\frac{1}{2}; -\frac{3}{8} \leq a < \frac{15}{4}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a = -\frac{1}{2}$ и/или $a = -\frac{3}{8}$	3

В решении верно найдены все граничные точки множества значений $a \left( a = -\frac{9}{2}, a = -\frac{1}{2}, a = -\frac{3}{8}, a = \frac{15}{4} \right)$ , но неверно определены промежутки значений $a$ ИЛИ верно пройдены все этапы решения, но неверно найдены граничные точки множества значений $a$ из-за вычислительной ошибки	2
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения и получен один из промежутков $\left(-\frac{9}{2}; \frac{15}{4}\right), \left(-\infty; -\frac{3}{8}\right)$ или $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}\right]$ , возможно, с исключением граничных точек	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19

На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 8, если изначально по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 39, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 199 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 199 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

**Решение.**

а) Пусть стирали следующие пары чисел: 10 и 11, 3 и 9, 4 и 8, 5 и 7. Тогда на доске останутся числа 2 и 6, сумма которых равна 8.

б) Среди чисел от 100 до 199 ровно 33 числа делятся на 3, ровно 33 числа дают при делении на 3 остаток 2 и ровно 34 числа дают при делении на 3 остаток 1. По условию каждый раз с доски стирали два числа, сумма которых делится на 3. Значит, в каждой из пар стёртых чисел либо оба числа делятся на 3, либо при делении на 3 одно из них даёт в остатке 1, а другое даёт в остатке 2. Поэтому на доске обязательно останется число, которое делится на 3, и число, которое при делении на 3 даёт остаток 1. Разность между ними не делится на 3 и, следовательно, не может равняться 39.

в) Как было доказано в предыдущем пункте, если на доске осталось ровно два числа, то одно из них делится на 3, а второе при делении на 3 даёт остаток 1. Первое из этих чисел не меньше 102 и не больше 198, второе — не меньше 100 и не больше 199. Поэтому если первое из этих чисел поделить на



второе, то получится не больше  $\frac{198}{100}$ , а если второе из этих чисел поделить на первое, то получится не больше  $\frac{199}{102}$ . Поскольку  $198 \cdot 102 > 199 \cdot 100$ , получаем, что  $\frac{198}{100} > \frac{199}{102}$  и наибольшее значение, которое может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них, не превосходит  $\frac{198}{100}$ .

На доске могли остаться только числа 100 и 198, так как остальные числа от 100 до 199 можно разбить на такие пары: 16 пар чисел, делящихся на 3, и 33 пары чисел, в каждой из которых при делении на 3 одно из чисел даёт в остатке 1, а другое даёт в остатке 2. Значит, наибольшее значение, которое может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них, равно  $\frac{198}{100} = 1,98$ .

**Ответ:** а) Да; б) нет; в) 1,98.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта <i>a</i> ; – обоснованное решение пункта <i>б</i> ; – искомая оценка в пункте <i>в</i> ; – пример в пункте <i>в</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4