

## Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ

10 класс

13 мая 2021 года

Вариант МА2000709

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО \_\_\_\_\_ класс \_\_\_\_\_

## Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа включает в себя 19 заданий и состоит из двух частей.

Ответом в заданиях части 1 (1–12) является целое число или десятичная дробь. Запишите ответ в отведённом для него месте на листе с заданиями.

В заданиях части 2 (13–19) требуется записать полное решение на отдельном чистом листе.

При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадами, справочниками, калькулятором.

При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут.

Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий. Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

*Желаем успеха!*

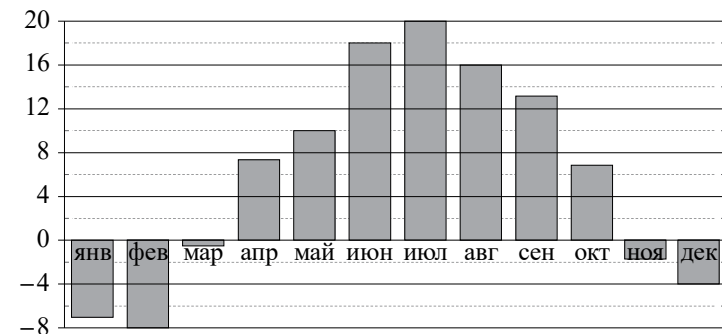
## Часть 1

В заданиях 1–12 дайте ответ в виде целого числа, или десятичной дроби, или последовательности цифр.

- 1 Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 510 рублей, а стоимость одного номера журнала — 23 рубля. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше потратила бы Аня, если бы подписалась на журнал?

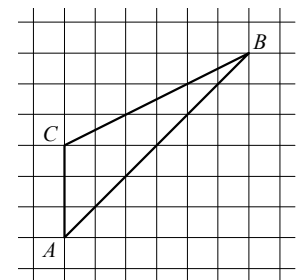
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной среднемесячной температурой.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён треугольник  $ABC$ . Найдите длину его медианы, проведённой из вершины  $C$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

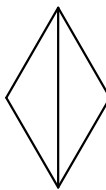
4 За круглый стол на 17 стульев в случайном порядке рассаживаются 15 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между двумя девочками будет сидеть один мальчик.

Ответ: \_\_\_\_\_.

5 Решите уравнение  $\sqrt{14 + 5x} = x$ .

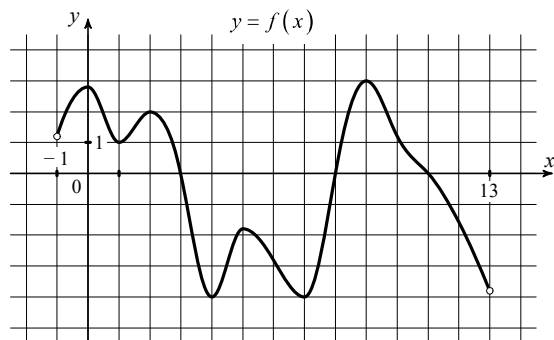
Ответ: \_\_\_\_\_.

6 Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна  $12\sqrt{3}$ , а острый угол равен  $60^\circ$ .



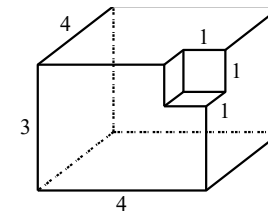
Ответ: \_\_\_\_\_.

7 На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-1; 13)$ . Определите количество целых точек, которые лежат на интервалах убывания функции  $f(x)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

8 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Ответ: \_\_\_\_\_.

9 Найдите значение выражения  $\frac{x^{-5} \cdot x^{-9}}{x^{-15}}$  при  $x = 5$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

10 Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности  $In$ , оперативности  $Op$ , объективности  $Tr$  публикаций, а также качества  $Q$  сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от 1 до 5.

Составители рейтинга считают, что объективность ценится вдесятеро, а информативность публикаций — втрое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{3In + Op + 5Tr + Q}{A}$$

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число  $A$ , при котором это условие будет выполняться.

Ответ: \_\_\_\_\_.

11 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5 % меди, второй — 13 % меди. Масса второго сплава больше массы первого на 6 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 12 % меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

12 Найдите точку минимума функции  $y = 7^{x^2 + 22x + 147}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

## Часть 2

**В заданиях 13–19 запишите полное решение на отдельном чистом листе.**

**Выберите и выполните только ОДНО из заданий 13.1 или 13.2.**

13.1

а) Решите уравнение  $\frac{\cos 2x - \sqrt{2} \sin x - 1}{\operatorname{tg} x - 1} = 0$ .

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ .

13.2

а) Решите уравнение  $3^{2x+2} + 3 \cdot 2^{2x+2} = 31 \cdot 6^x$ .

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[-3; 3]$ .

14

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на рёбрах  $A_1 B_1$ ,  $B_1 C_1$  и  $AD$  выбраны точки  $K$ ,  $M$ ,  $N$  соответственно так, что  $A_1 K : K B_1 = C_1 M : M B_1 = DN : NA = 1 : 2$ .

а) Докажите, что прямая  $BD_1$  перпендикулярна плоскости  $KMN$ .

б) Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $KMN$ , если ребро куба равно 5.

15

Решите неравенство  $\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 + x - 4} \leq 0$ .

16

В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BL$ . На стороне  $AB$  взята точка  $K$  так, что отрезки  $KL$  и  $BC$  параллельны. Окружность, описанная около треугольника  $AKC$ , пересекает прямую  $BC$  повторно в точке  $M$ .

а) Докажите, что  $AK = BM$ .

б) Найдите площадь четырёхугольника  $AKMC$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна 81 и  $AB : BC = 4 : 5$ .

17

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 17% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 1,95 млн рублей?

18

Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{a-x} = a$$

имеет хотя бы одно решение.

19

а) Существует ли делящееся на 11 трёхзначное число, вторая цифра которого равна произведению двух других его цифр?

б) Существует ли делящееся на 11 трёхзначное число, сумма всех цифр которого равна 20?

в) Найдите наибольшее делящееся на 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Ответ обоснуйте.

[math100.ru](http://math100.ru)

Ответы на тренировочные варианты 2000709-2000710 (профильный уровень) от  
13.05.2021

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
<b>2000709</b>	65	5	3	0,125	7	36	5	80	5	10	8	- 11
<b>2000710</b>	135	1	2	0,04	4	3	4	130	6	8	6	- 13

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

**13.1**

а) Решите уравнение  $\frac{\cos 2x - \sqrt{2} \sin x - 1}{\operatorname{tg} x - 1} = 0$ .

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ .

**Решение.**

Перейдём к системе:

$$\begin{cases} \cos 2x - \sqrt{2} \sin x - 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x - 1 \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Преобразуем уравнение:

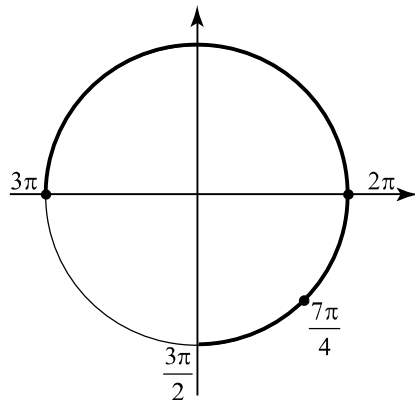
$$1 - 2\sin^2 x - \sqrt{2} \sin x - 1 = 0; \quad \sin x(2\sin x + \sqrt{2}) = 0.$$

Получаем  $\sin x = 0$  или  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , следовательно,  $x = \pi n$ ,  $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$  или

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \text{ где } n, m, k \in \mathbb{Z}.$$

Условию  $\operatorname{tg} x - 1 \neq 0$  удовлетворяют только решения  $x = \pi n$  и  $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ .



Получаем  $x = \frac{7\pi}{4}$ ,  $x = 2\pi$  и  $x = 3\pi$ .

**Ответ:** а)  $\pi n$ ,  $-\frac{\pi}{4} + 2\pi m$ , где  $n, m \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{7\pi}{4}$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$ .

**13.2**

а) Решите уравнение  $3^{2x+2} + 3 \cdot 2^{2x+2} = 31 \cdot 6^x$ .

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[-3; 3]$ .

**Решение.**

Преобразуем уравнение:

$$9 \cdot 3^{2x} - 31 \cdot 6^x + 12 \cdot 2^{2x} = 0.$$

Поскольку  $2^{2x} > 0$ , разделим уравнение на  $2^{2x}$ :

$$9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 31 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 12 = 0$$

Пусть  $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ , тогда уравнение принимает вид  $9 \cdot t^2 - 31 \cdot t + 12 = 0$ . Корни

данного уравнения:  $t = 3$  и  $t = \frac{4}{9}$ .

Получаем  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9}$ ,  $x = -2$  или  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 3$ ,  $x = \log_{\frac{3}{2}} 3$ .

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку  $[-3; 3]$ .

Корень  $x = -2$  принадлежит данному отрезку.

Поскольку  $\log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} < \log_{\frac{3}{2}} 3 < \log_{\frac{3}{2}} \frac{27}{8}$ , корень  $x = \log_{\frac{3}{2}} 3$  также принадлежит

данному отрезку.

Получаем  $x = -2$  или  $x = \log_{\frac{3}{2}} 3$ .

**Ответ:** а)  $-2$ ;  $\log_{\frac{3}{2}} 3$ ; б)  $-2$ ;  $\log_{\frac{3}{2}} 3$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

**14** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на рёбрах  $A_1 B_1$ ,  $B_1 C_1$  и  $AD$  выбраны точки  $K$ ,  $M$ ,  $N$  соответственно так, что  $A_1 K : KB_1 = C_1 M : MB_1 = DN : NA = 1 : 2$ .

- а) Докажите, что прямая  $BD_1$  перпендикулярна плоскости  $KMN$ .  
 б) Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $KMN$ , если ребро куба равно 5.

**Решение.**

а) Так как прямая  $KM$  перпендикулярна прямой  $B_1 D_1$ , она перпендикулярна и прямой  $BD_1$  по теореме о трёх перпендикулярах.

Пусть плоскость  $KMN$  пересекает ребро  $CD$  в точке  $L$ , диагональ  $BD$  в точке  $G_1$ , а диагональ  $B_1 D_1$  в точке  $F$ .

Из подобия треугольников  $A_1 B_1 C_1$  и  $KB_1 M$ , а также треугольников  $ADC$  и  $NDL$  следует, что  $B_1 F = \frac{B_1 D_1}{3}$ ,  $DG = \frac{BD}{6}$ .

Рассмотрим сечение куба плоскостью  $BB_1 D_1$  (рис. 2). Опустим перпендикуляр  $FH$  на прямую  $BD$ . Тогда

$$GH = BD - DG - BH = BD - DG - B_1 F = \frac{BD}{2};$$

$$FH = DD_1 = \frac{BD}{\sqrt{2}}.$$

Прямоугольные треугольники  $FGH$  и  $BD_1 D$  подобны, так как  $\frac{FH}{BD} = \frac{GH}{DD_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Следовательно,  $\angle GFH = \angle D_1 B D$ , и тогда треугольники  $BGO$  и  $FGH$  подобны по двум углам, а значит,  $\angle BOG = \angle FHG = 90^\circ$ .

Таким образом, прямая  $BD_1$  перпендикулярна прямым  $KM$  и  $GF$ , а следовательно, и плоскости  $KMN$ .

б) Обозначим точку пересечения диагоналей квадрата  $ABCD$  буквой  $P$ . Так как прямая  $AC$  параллельна прямой  $LN$ , а следовательно, и плоскости  $KMN$ , расстояние от точки  $A$  до плоскости  $KMN$  равно расстоянию от точки  $P$  до плоскости  $KMN$ . Перпендикуляр  $PH_1$ , проведённый из точки  $P$  на плоскость  $KMN$ , параллелен прямой  $BD_1$  и лежит в плоскости  $BB_1 D_1$ .

Треугольники  $BD_1 D$  и  $PH_1 G$  подобны, поэтому  $\frac{PH_1}{BD} = \frac{PG}{BD_1}$ ;

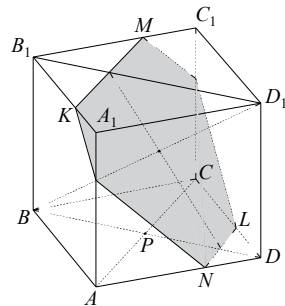


Рис. 1

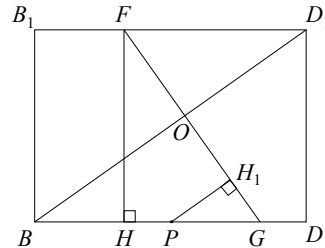


Рис. 2

$$BD = AB\sqrt{2} = 5\sqrt{2}; PG = \frac{BD}{2} - DG = \frac{BD}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{3}; BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1^2} = 5\sqrt{3}.$$

Таким образом,  $PH_1 = \frac{BD \cdot PG}{BD_1} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{5\sqrt{3} \cdot 3} = \frac{10\sqrt{3}}{9}$ .

**Ответ:** б)  $\frac{10\sqrt{3}}{9}$ .

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте б, возможно, с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**15**

Решите неравенство  $\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 + x - 4} \leq 0$ .

**Решение.**

Перейдём к равносильной системе, умножив обе части неравенства на положительную сумму  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x}$ :

$$\begin{cases} x^2 + 2x \geq 0, & \begin{cases} x(x+2) \geq 0, \\ (x-1)^2 \geq 0, \\ \frac{4x-1}{x^2+x-4} \geq 0. \end{cases} \\ x^2 - 2x + 1 \geq 0, \\ \frac{(x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 2x)}{x^2 + x - 4} \leq 0; \end{cases}$$

Из первого неравенства получаем  $x \leq -2$  или  $x \geq 0$ .

Второе неравенство выполняется при всех  $x$ .

Из третьего неравенства получаем  $-\frac{\sqrt{17}-1}{2} < x \leq 0,25$  или  $x > \frac{\sqrt{17}-1}{2}$ .

Решение данного неравенства:  $-\frac{\sqrt{17}-1}{2} < x \leq -2, 0 \leq x \leq 0,25$  или  $x > \frac{\sqrt{17}-1}{2}$ .

**Ответ:**  $\left(-\frac{\sqrt{17}-1}{2}; -2\right], [0; 0,25], \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; +\infty\right)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением одной из точек $-2, 0$ или $0,25$ . ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

- 16** В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BL$ . На стороне  $AB$  взята точка  $K$  так, что отрезки  $KL$  и  $BC$  параллельны. Окружность, описанная около треугольника  $AKC$ , пересекает прямую  $BC$  повторно в точке  $M$ .
- а) Докажите, что  $AK = BM$ .  
 б) Найдите площадь четырёхугольника  $AKMC$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна  $81$  и  $AB : BC = 4 : 5$ .

**Решение.**

а) Так как отрезки  $KL$  и  $BC$  параллельны, получаем, что  $\angle KLB = \angle CBL = \angle KBL$ , следовательно, треугольник  $KBL$  равнобедренный и  $BK = KL$ .

$\angle AKL$  — внешний угол треугольника  $KBL$ , поэтому  $\angle AKL = 2\angle KBL = \angle KBM$ .

Так как отрезки  $KL$  и  $BC$  параллельны,  $\angle ALK = \angle ACB$  как соответственные углы.

$\angle BKM$  — внешний угол вписанного в окружность четырёхугольника  $AKMC$ , значит,  $\angle BKM = 180^\circ - \angle AKM = \angle ACM = \angle ALK$ .

Таким образом, треугольники  $KBM$  и  $AKL$  равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, и  $AK = BM$ .

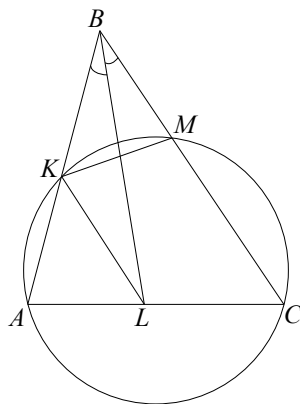
б) По теореме о секущих имеем  $BK \cdot BA = BM \cdot BC$ , следовательно,  $\frac{BM}{BK} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$ .

Пусть  $BM = 4x$ , тогда  $BK = 5x$ ,  $AB = AK + BK = BM + BK = 9x$ .

Коэффициент подобия треугольников  $KBM$  и  $ABC$  равен  $\frac{BM}{AB} = \frac{4}{9}$ .

Найдём площадь четырёхугольника:

$$S_{AKMC} = S_{ABC} - S_{BKM} = S_{ABC} - \frac{16}{81} S_{ABC} = 65.$$



Ответ: б) 65.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ . ИЛИ При обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 17** В июле планируется взять кредит в банке на сумму  $8$  млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на  $17\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
  - в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.
- На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил  $1,95$  млн рублей?

**Решение.**

Пусть кредит взят на  $n$  лет. По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$8; \frac{8(n-1)}{n}; \dots; \frac{8 \cdot 2}{n}; \frac{8}{n}; 0.$$

По условию каждый январь долг возрастает на  $17\%$ . Значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$9,36; \frac{9,36(n-1)}{n}; \dots; \frac{9,36 \cdot 2}{n}; \frac{9,36}{n}.$$

Следовательно, наибольшая выплата составляет  $1,36 + \frac{8}{n}$ . Получаем

$$1,36 + \frac{8}{n} \leq 1,95, \text{ откуда } n \geq 14.$$

Ответ: 14.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 18 Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{a-x} = a$$

имеет хотя бы одно решение.

**Решение.**

При  $a=0$  уравнение  $\sqrt{x+a} + \sqrt{a-x} = a$  принимает вид  $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 0$  и имеет единственное решение. При  $a < 0$  уравнение  $\sqrt{x+a} + \sqrt{a-x} = a$  не имеет решений, так как  $\sqrt{x+a} + \sqrt{a-x} \geq 0 > a$ .

Если  $a > 0$ , то уравнение  $\sqrt{x+a} + \sqrt{a-x} = a$  имеет смысл при  $x \in [-a; a]$  и равносильно на этом отрезке уравнениям  $(x+a) + 2\sqrt{a^2 - x^2} + (a-x) = a^2$  и  $2\sqrt{a^2 - x^2} = a^2 - 2a$ . При  $a \in (0; 2)$  это уравнение не имеет решений, так как для всех допустимых  $x$  имеем  $2\sqrt{a^2 - x^2} \geq 0 > a^2 - 2a$ . При  $a \in [2; +\infty)$  оно равносильно уравнениям  $4(a^2 - x^2) = (a^2 - 2a)^2$  и  $4x^2 = a^3(4-a)$ . Значит, оно имеет одно решение  $x=0$  при  $a=4$ , не имеет решений при  $a \in (4; +\infty)$ , так как  $4x^2 \geq 0 > a^3(4-a)$ , и имеет решения  $x = \pm \frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}$  при  $a \in [2; 4)$

$(\pm \frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}) \in [-a; a]$ , так как  $\sqrt{a(4-a)} \leq \frac{a+(4-a)}{2} = 2$  по неравенству о средних).

Отсюда получаем, что исходное уравнение имеет хотя бы одно решение при  $a=0$ ;  $2 \leq a \leq 4$ .

**Ответ:**  $a=0$ ;  $2 \leq a \leq 4$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только исключением одной из точек: $a=2$ или $a=4$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только исключением точки $a=0$ . ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

- 19 а) Существует ли делящееся на 11 трёхзначное число, вторая цифра которого равна произведению двух других его цифр?  
б) Существует ли делящееся на 11 трёхзначное число, сумма всех цифр которого равна 20?  
в) Найдите наибольшее делящееся на 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Ответ обоснуйте.

**Решение.**

а) Например, число 242 делится на 11, а его вторая цифра 4 равна произведению первой и третьей его цифр.

б) Пусть трёхзначное число имеет вид  $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — цифры. Имеем  $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = (a-b+c) + 11 \cdot (9a+b)$ . Значит, это число делится на 11 тогда и только тогда, когда  $a-b+c$  делится на 11, то есть когда  $a-b+c=0$  или  $a-b+c=11$ . Если  $a+b+c=20$ , то  $a-b+c = a+b+c-2b = 20-2b$  — чётное число, и, следовательно,  $a-b+c = 20-2b = 0$ . Пришли к противоречию, так как  $b \leq 9$ .

в) Пусть восьмизначное число  $n$  имеет вид

$$a \cdot 10^7 + b \cdot 10^6 + c \cdot 10^5 + d \cdot 10^4 + e \cdot 10^3 + f \cdot 10^2 + g \cdot 10 + h,$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$  и  $h$  — цифры. Имеем  $n = 11k - (a-b+c-d+e-f+g-h)$ , где  $k$  — целое число (так как  $10^7+1, 10^6-1, 10^5+1, 10^4-1, 10^3+1, 10^2-1$  и 11 делятся на 11). Значит,  $n$  делится на 11 тогда и только тогда, когда число  $m = a-b+c-d+e-f+g-h$  делится на 11, то есть когда  $m=0$ ,  $m = \pm 11$ ,  $m = \pm 22$  или  $m = \pm 33$ . По условию



$$a + b + c + d + e + f + g + h = 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 43.$$

Значит, число

$$m = a + b + c + d + e + f + g + h - 2(b + d + f + h) = 43 - 2(b + d + f + h)$$

нечётное. Поскольку  $13 = 1 + 3 + 4 + 5 \leq b + d + f + h \leq 6 + 7 + 8 + 9 = 30$ , имеем  $-17 \leq m \leq 17$ . Отсюда получаем, что  $m = 11$  или  $m = -11$ . В первом случае  $b + d + f + h = 16$  и  $a + c + e + g = 27$ . Этим условиям, а следовательно, и условиям задачи удовлетворяет число 98746351.

Пусть число  $n$  — наибольшее число, удовлетворяющее условию задачи. Тогда для него  $a = 9$ ,  $b = 8$ ,  $c = 7$ ,  $4 \leq d \leq 6$ ,  $b + d + f + h \leq 8 + 6 + 5 + 4 = 23$ ,  $m = 43 - 2(b + d + f + h) \geq -3$ . Поэтому  $m = 11$ ,  $b + d + f + h = 16$ ,  $d + f + h = 8$  и  $a + c + e + g = 27$ . Значит, цифры  $d$ ,  $f$  и  $h$  — это расставленные в некотором порядке цифры 1, 3 и 4, а цифры  $e$  и  $g$  — расставленные в некотором порядке цифры 5 и 6. Среди чисел указанного вида число 98746351 является максимальным, поэтому оно и является искомым числом.

**Ответ:** а) Да; б) нет; в) 98746351.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта $a$ ; – обоснованное решение пункта $b$ ; – искомая оценка в пункте $в$ ; – пример в пункте $в$ , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4