Решения задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2017-18 уч. года

7 класс

7.1. Угол, образованный биссектрисой угла *ABC* с его сторонами, в 6 раз меньше угла, смежного к углу *ABC*. Найдите угол *ABC*.

Ответ: 45 градусов. **Решение**. Пусть x – градусная мера угла *ABC*. Из условия задачи получаем уравнение $\frac{x}{2}=\frac{180-x}{6}$ $\Leftrightarrow 8x = 360 \Leftrightarrow x = 45$ (градусов).

7.2. Автомобиль, двигаясь с постоянной скоростью, доехал из пункта А до пункта В за 3 часа. Чтобы сократить время обратного пути, шофер выехал из пункта В со скоростью на 25% больше, а доехав до середины пути между А и В, увеличил скорость еще на 20%. Сколько времени займет обратная дорога?

Ответ: 2 часа 12 минут. **Решение**. Пусть длина пути из А в В равна a (км), а скорость движения из А в В равна v (км/ч). Тогда $\frac{a}{v}=3$. Пусть С – середина пути между А.и В. Тогда время движения на обратном пути от В до С равно $\frac{a/2}{v\cdot 1{,}25}=\frac{2}{5}\frac{a}{v}=\frac{6}{5}$ (час), а время движения от С до А равно $\frac{a/2}{v\cdot 1{,}25\cdot 1{,}2}=\frac{1}{3}\frac{a}{v}=1$ (час). Итак, время обратного пути $\frac{6}{5}+1=\frac{11}{5}$ (час).

7.3. Имеется 10 палочек длины 1, 2, 4, …,2^9 (см). Можно ли из этих палочек, используя не обязательно все, сложить треугольник?

Ответ: нельзя. **Решение**. Предположим, от противного, что треугольник сложить можно, и пусть 2^n – длина наибольшей из палочек, участвующих в построении ($n\le 9$). Но тогда сторона треугольника, содержащая эту палочку, будет больше суммы двух других сторон, т.к. $2^n>1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$. Последнее равенство легко доказать: $2^n=2^{n-1}+2^{n-1}=$ $2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-2}=\ldots=2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+2=(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+1)+1$. Полученное противоречие доказывает невозможность построения.

7.4. Существует ли шестизначное натуральное число, которое после умножения на 9 записывается теми же цифрами, но в обратном порядке?

Ответ: существует. **Решение**. Пусть $\overline{abcdef}$ – искомое число, т.е. $\overline{abcdef}\cdot 9=\overline{fedcba}$. Тогда очевидно a = 1, b = 0 (иначе при умножении на 9 получили бы семизначное число). Поэтому f = 9, а предпоследняя цифра e = 8 (что следует из умножения столбиком). Тогда третья цифра c может быть 8 или 9. Но если c = 8, то d = 1, т.к. сумма цифр делится на 9, однако число 108189 при проверке не подходит. Если же c = 9, то d = 9 и число 109989 – единственное, удовлетворяющее условию, и при проверке оно подходит.

7.5. В вершинах куба расставили в некотором порядке 8 чисел: 1, 2, …, 8, а затем для каждого из 12 ребер куба подсчитали сумму двух чисел на его концах. Докажите, что среди этих сумм есть совпадающие.

Решение. Предположим противное, тогда на ребрах будет 12 различных чисел среди возможных сумм: от минимальной, равной 3 = 1 + 2, до максимальной, равной 15 = 8 + 7. Таким образом, среди этих 13 возможных чисел есть только один пробел (не занятый суммами на ребрах). Если этого пробела нет среди чисел {3; 4; 5; 6}, то число 3 на ребре получается как сумма 1 + 2 на его концах. Далее, число 4 получается только как сумма 1 + 3 на концах, а число 5 получается как сумма 1 + 4 (представление 2 + 3 невозможно, т.к. вершины 2 и 3 уже определены как противоположные вершины в квадрате с вершинами 1, 2, 3). Наконец, получаем противоречие с числом 6, которое невозможно представить как сумму двух чисел, т.к. представление 6 = 1 + 5 противоречит тому, что из вершины 1 ведут всего 3 "использованные" ребра, а другое представление (6 = 2 + 4) невозможно в силу тех же аргументов, что и выше для представления 5 = 2 + 3. Полностью аналогичные рассуждения (только для самых больших возможных сумм) приводят к противоречию в случае, когда пробела нет среди чисел 15, 14, 13, 12.

8 класс

8.1. Автомобиль, двигаясь с постоянной скоростью, доехал из пункта А до пункта В за 3 часа. Чтобы сократить время обратного пути, шофер выехал из пункта В со скоростью на 25% больше, а доехав до середины пути между А и В, увеличил скорость еще на 20%. Сколько времени займет обратная дорога?

Ответ: 2 часа 12 минут. **Решение**. См. задачу 7.2.

8.2. Сколько решений имеет уравнение $(2x+y)^2 = 2017 + x^2$ в целых числах *x, y*?

Ответ: четыре решения. **Решение**. Поскольку 2017 – число простое, то из разложения $2017 = (3x+y)(x+y)$, следуют возможные варианты систем:

$$\begin{cases} 3x+y=2017 \\ x+y=1 \end{cases}; \begin{cases} 3x+y=1 \\ x+y=2017 \end{cases}; \begin{cases} 3x+y=-2017 \\ x+y=-1 \end{cases}; \begin{cases} 3x+y=-1 \\ x+y=-2017 \end{cases}.$$

Решая каждую из этих систем, получаем четыре решения: (1008;–1007), (–1008;3025), (–1008;1007), (1008; –3025).

8.3. На стороне AC треугольника ABC взята точка M. Оказалось, что $AM = BM + MC$ и $\angle BMA = \angle MBC + \angle BAC$. Найдите $\angle BMA$.

Ответ. 60°.**Решение**. Вначале покажем, что треугольник *ABC* – равнобедренный. Действительно, это следует из условия $\angle BMA = \angle MBC + \angle BAC$ и свойства внешнего угла: $\angle BMA = \angle MBC + \angle BCA$. Из этих двух равенств имеем $\angle BCA = \angle BAC$, и значит, треугольник *ABC* – равнобедренный. Далее, возьмем на стороне *AC* точку *K*, симметричную точке *M* относительно точки *O* – середины *AC*. Тогда *AK* = *MC* и поэтому из соотношения *AM* = *BM* + *MC* следует, что точка *M* лежит между *C* и *O* и, значит, это соотношение дает *KM* = *BM*. Поскольку Δ *ABC* – равнобедренный, точка *O* совпадает с проекцией точки *B* на основание *AC*, и поэтому *BM* = *BK*. Таким образом, в треугольнике *KBM* все стороны равны, значит, он равносторонний и все его углы равны по 60°.

8.4. Вдоль окружности записали в некотором порядке 25 чисел: 1, 2, …, 25. Могло ли оказаться так, что любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо в несколько (целое число) раз?

Ответ: не могло. **Решение.** Предположим, от противного, что расставить числа можно, и рассмотрим три самых больших простых числа, меньших 25, а именно 17, 19 и 23. Пусть *n* – любое из этих трех чисел. Поскольку $n+10>25$ и $2n>25$, то соседними с *n* двумя числами на окружности могут быть только $n-10$ и единица. Таким образом, единица должна быть соседом сразу трех чисел, что, очевидно, невозможно

8.5. В вершинах куба расставили в некотором порядке 8 чисел: 1, 2, …, 8, а затем для каждого из 12 ребер куба подсчитали сумму двух чисел на его концах. Докажите, что среди этих сумм есть совпадающие.

Решение. См. задачу 7.5.

9 класс

9.1. Сколько решений имеет уравнение $(2x+y)^2 = 2017 + x^2$ в целых числах *x*, *y*?

Ответ: четыре решения. **Решение**. См. задачу 8.2.

9.2. Дан треугольник *ABC*, у которого $\frac{BC}{AC} < \frac{1}{2}$. Докажите, что $\angle A < 30°$.

Решение. Пусть *a* = *BC*, *b* = *AC*. Первый способ решения. Построим окружность радиуса *a*, проходящую через точки *B* и *C* так, что ее центр *O* лежит по ту же сторону от прямой *BC*, что точка *A*. Тогда *A* не может лежать внутри этой окружности или на самой окружности, т.к. *AC* больше ее диаметра. Значит, угол *A* меньше половины центрального угла *BOC*, равного 60°.

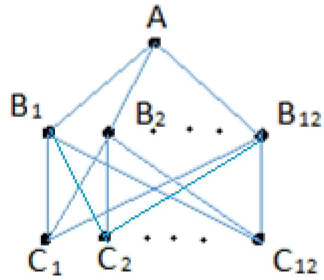
Второй способ решения основан на теореме косинусов. Пусть $x = AB$, $t = \cos\angle A$, тогда $a^2 = x^2 + b^2 - 2bx \cdot t \Leftrightarrow x^2 - 2btx + b^2 - a^2 = 0$. Рассмотрим дискриминант этого уравнения $\frac{D}{4} = b^2t^2 - b^2 + a^2 \geq 0 \Rightarrow t^2 \geq \frac{b^2 - a^2}{b^2} = 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 > 1 - \frac{1}{4}$. Отсюда $\cos\angle A > \frac{\sqrt{3}}{2}$ и значит, $\angle A < 30°$.

9.3. Вдоль окружности записали в некотором порядке 25 чисел: 1, 2, …, 25. Могло ли оказаться так, что любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо в несколько (целое число) раз?

Ответ: не могло. **Решение.** См. задачу 8.4.

9.4. Какое наименьшее количество кругов единичного радиуса требуется, чтобы полностью покрыть ими треугольник со сторонами 2; 3; 4?

Ответ: три круга. **Решение**. Пусть *AC* = 4, *AB* = 2, *BC* = 3 и пусть C_1, A_1 и B_1 – середины сторон *AB, BC* и *AC* соответственно. Заметим, что угол *B* тупой, т.к. $AC^2 > AB^2 + BC^2$. Поэтому точки *B* и B_1 лежат внутри круга радиуса 1 с центром в точке *O* – середине отрезка C_1A_1 (здесь мы учли, что $\angle C_1B_1A_1 = \angle B$ и то, что длина средней линии равна половине *AC*). Итак, параллелограмм $BA_1B_1C_1$ покрывается единичным кругом с центром *O*. Два других единичных круга с центрами *M* и *N* в серединах AB_1 и B_1C покроют треугольники AC_1B_1 и B_1A_1C (здесь опять используется тот факт, что углы AC_1B_1 и B_1A_1C равны углу *B*, а значит, тупые). Покажем теперь, что двух единичных кругов недостаточно. В противном случае их центры обязаны совпадать с точками *M* и *N* (иначе отрезок *AC* длины 4 не смог бы накрываться двумя кругами диаметра 2). Но тогда точка *B* лежит вне обоих этих кругов, т.к. иначе нарушалось бы неравенство треугольника для треугольника *ABM* (*AB*< *AM*+*MB*) или для треугольника *NBC* (*BC*<*NB*+*NC*)°.



9.5. В 9а и 9б классах по 25 человек. В 9а у каждого ученика не менее 13 друзей в классе, а в 9б у каждого не менее 12 друзей в классе. Обязательно ли найдутся три друга (когда каждый в тройке дружит с двумя остальными) **а)** в 9а; **б)** в 9б?

Ответ: **а)** да; **б)** нет. **Решение**. **а)** . Возьмем любых двух друзей *A* и *B*. Из остальных 23 человек *A* имеет не менее 12 друзей, и *B* имеет не менее 12 друзей. Значит, среди друзей *A* и *B* есть хотя бы один общий (в противном случае было бы 12 + 12 ≤ 23). Вместе с *A* и *B* этот общий друг составляет нужную тройку друзей.

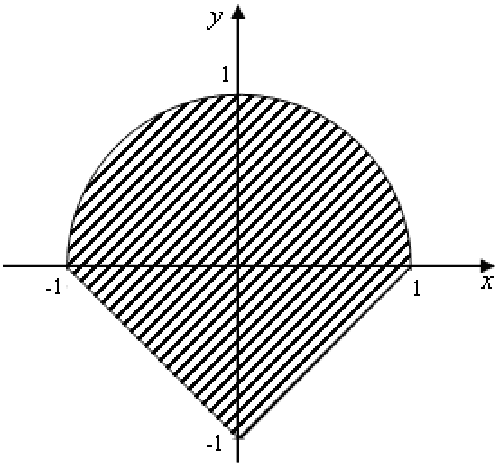
б) Рассмотрим ситуацию (см. граф), когда ученик *A* дружит с 12 друзьями $B_1, B_2, ..., B_{12}$ и есть ученики $C_1, C_2, ..., C_{12}$, каждый из которых дружит с каждым из учеников $B_1, B_2, ..., B_{12}$. Таким образом, у *A* есть 12 друзей, у $B_1, B_2, ..., B_{12}$ по 13 друзей, и у каждого $C_1, C_2, ..., C_{12}$ по 12 друзей. Но тройки друзей составить нельзя.

10 класс

10.1. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости неравенствами $|x|-1 \le y \le \sqrt{1-x^2}$

Ответ. $\frac{\pi}{2}+1$. **Решение.** Фигура имеет вид, показанный на рисунке: она ограничена снизу графиком $y=|x|-1$, а сверху – полуокружностью $y=\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Площадь фигуры складывается из площади полукруга единичного радиуса и половинки квадрата с диагональю, равной 2.



10.2. Дан треугольник *ABC*, у которого $\frac{BC}{AC}<\frac{1}{2}$. Докажите, что $\angle A < 30°$.

Решение. См. задачу 9.2.

10.3. Какое наименьшее количество кругов единичного радиуса требуется, чтобы полностью покрыть ими треугольник со сторонами 2; 3; 4?

Ответ: три круга. **Решение**. См. задачу 9.4.

10.4. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $x^4-ax^2+1=0$ имеет 4 корня, образующих арифметическую прогрессию.

Ответ: $\frac{10}{3}$**. Решение.** Обозначим $t = x^2$. Тогда уравнение $t^2-at+1=0$ должно иметь два положительных корня t_1, t_2 ($t_1 < t_2$), а корни исходного уравнения будут иметь вид $-\sqrt{t_2}$, $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$. Условие задачи об арифметической прогрессии дает соотношение $\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=2\sqrt{t_1}$, т.е. $\sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1} \Rightarrow t_2=9t_1$. Из теоремы Виета имеем $t_1t_2 = 1$ и $t_1 + t_2 = a$. Отсюда: $9t_1^2=1 \Leftrightarrow t_1=\frac{1}{3}$ (учитывая положительность t_1) и $a=t_1+9t_1=10t_1=\frac{10}{3}$.

10.5. Имеется 10 палочек длины $1; 1.9; (1.9)^2; ...; (1.9)^9$. Можно ли из этих палочек, используя не обязательно все, сложить **а)** треугольник **б**) равнобедренный треугольник?

Ответ: **а)** можно; **б**) нельзя. **Решение**. **а)** Возьмем в качестве сторон треугольника $a=1+1.9+(1.9)^2+...+(1.9)^7$, $b=(1.9)^8$, $c=(1.9)^9$. Сначала покажем, что $c>a$. Имеем по формуле суммы геометрической прогрессии $a=\frac{(1.9)^8-1}{1.9-1}<(1.9)^9 \Leftrightarrow (1.9)^8(1-0.9\cdot 1.9)<1$ (последнее очевидно, т.к. вторая скобка меньше 0). Таким образом, c – наибольшая сторона. Далее проверим неравенство треугольника: $a+b>c \Leftrightarrow \frac{(1.9)^9-1}{1.9-1}>(1.9)^9 \Leftrightarrow (1.9)^9\cdot 0.1>1$ (последнее очевидно, т.к. уже $(1.9)^4>10$).

б) Предположим, от противного, что сложить треугольник можно, и пусть 1.9^{n_2} , …, $1.9^{n_л}$ – длины палочек, составляющих одну боковую сторону, а 1.9^{m_1}, , …, 1.9^{m_l} – другую. Тогда имеем

$$1.9^{n_1}+\ldots+1.9^{n_k}=1.9^{m_1}+\ldots+1.9^{m_l}.$$

Пусть, для определенности, n_1 – наименьший из показателей, входящих в это равенство. Тогда, сократив равенство на 1.9^{n_1}, получим, что 1.9 является корнем многочлена, у которого старший коэффициент и свободный член равны ± 1, а остальные коэффициенты ± 1 или 0. Но это противоречит тому факту, что рациональными корнями многочлена с целыми коэффициентами могут быть лишь такие числа $\frac{p}{q}$, у которых p – делитель свободного члена, а q – делитель старшего коэффициента.

11 класс

11.1. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости неравенствами $|x|-1 \le y \le \sqrt{1-x^2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+1$. **Решение**. См. задачу 10.1.

11.2. Назовём натуральное число любопытным, если после умножения на 9 оно записывается теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что множество любопытных чисел бесконечно**.**

Решение. Рассуждая аналогично тому, как это сделано при решении задачи 7.4, рассмотрим числа $N_k = 1099...989$ (здесь между цифрами 0 и 8 находится *k* девяток). Легко непосредственно проверить, что все числа N_k при любом натуральном *k* любопытные.

11.3. Решите неравенство $\sqrt{x}-\sqrt{1-x}+8\sin x<8$.

Ответ: 0 ≤ x ≤ 1. **Решение**. ОДЗ неравенства есть отрезок [0;1]. На [0;1] функция *f(x)* = $\sqrt{x}-\sqrt{1-x}+8\sin x$ монотонно возрастает. Проверим значение на правом конце отрезка, а именно, покажем, что *f*(1) < 8. Действительно, 1+ 8sin1 < 1+8sin π/3 (т.к. 1< π/3, а функция sin x в первой четверти возрастает) и осталось проверить неравенство $1+4\sqrt{3}<8 \iff 4\sqrt{3}<7 \iff$ 16 3 < 49 . Таким образом, решением исходного неравенства будут все точки отрезка [0;1]

11.4. **а)** Дан прямоугольный параллелепипед объема 2017 с целочисленными координатами вершин в пространстве с декартовой системой координат. Найдите диагональ параллелепипеда, если известно, что его ребра параллельны осям координат. **б)** Существует ли прямоугольный параллелепипед объема 2017 с целочисленными координатами вершин, у которого не все ребра параллельны осям координат.

Ответ: **а)** $\sqrt{2017^2+2}$**, б)** существует**. Решение**. **а)** Пусть размеры параллелепипеда *a*×*b*×*c*. Тогда имеем *abc* = 2017, и в силу простоты числа 2017 получаем, что ребра *a, b, c* равны (в некотором порядке) 2017, 1, 1, поэтому диагональ равна $\sqrt{2017^2+1^2+1^2}$ **. б)** 2017 это простое число вида 4k+1, а такие числа можно представить как сумму двух точных квадратов; в данном случае 2017=1936+81= 44^2+9^2 (такое представление нетрудно подобрать, т.к. 44 – самое большое натуральное число, квадрат которого меньше 2017). Поэтому можно построить параллелепипед, основанием которого является квадрат в плоскости xOy со сторонами, не параллельными осям *x* и *y* , а высотой – отрезок [0;1] оси *z* (вершины квадрата – точки (0;0), (44;9), (-9;44), (35;53), сторона квадрата равна $\sqrt{2017}$). Диагональ этого параллелепипеда равна $\sqrt{2017+2017+1} = \sqrt{4035}$

11.5. ? Имеется 10 палочек длины $1; 1.9; (1.9)^2; ...; (1.9)^9$. Можно ли из этих палочек, используя не обязательно все, сложить **а)** треугольник; **б**) равнобедренный треугольник?

Ответ: **а)** можно; **б**) нельзя. **Решение:** см. задачу 10.5