Олимпиада по математике
Муниципальный этап 2018–2019 уч. г.

7 класс

7.1. Три положительных числа изменили следующим образом: первое увеличили на 10%, второе – на 13%, а третье уменьшили на 20%. Больше или меньше окажется произведение трех полученных чисел по сравнению с произведением исходных?

Ответ: меньше. **Решение**. Пусть $a;b;c$ – исходные числа. Тогда $1.1a;\ 1.13b;\ 0.8c$ – полученные числа после изменения, а их произведение $(1.1\cdot 1.13\cdot 0.8)abc = 0.9944abc < abc$.

7.2. На футбольном поле встретились две команды – «Торпедо» и «Старт», по 11 человек в каждой. Средний рост игроков «Торпедо» на 2 см больше среднего роста игроков «Старта». После того, как судья удалил с поля по одному игроку каждой команды, средний рост у команд на поле сравнялся. Насколько выше удаленный игрок «Торпедо» удаленного игрока «Старта»?

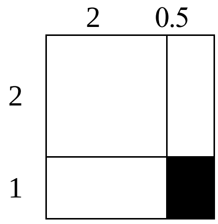
Ответ: на 22 см. **Решение**. Пусть x (см) – средний рост игроков «Старта», y (см) – рост удаленного игрока «Торпедо», z (см) – рост удаленного игрока «Старта». Тогда из уравнения (по условию задачи) $\frac{11(x+2)-y}{10}=\frac{11x-z}{10}$ получим $y-z=22$.

.

7.3. . Двоечник Вова складывает дроби так: $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m+p}{n+q}$. **а)** Существуют ли натуральные числа m, n, p, q, для которых Вовин «способ» даст правильный ответ? **б)** Докажите, что для любых натуральных знаменателей n, q найдутся целые ненулевые числители m, p , для которых Вовин «способ» даст правильный ответ.

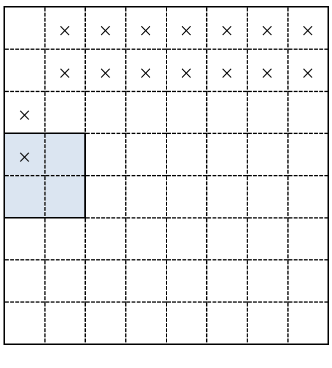
Ответ: **а**) не существуют. **Решение**. Домножив равенство $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m+p}{n+q}$ на $(n+q)nq$ и приведя подобные члены, получим равенство $n^2p+q^2m=0$, невозможное для натуральных чисел. Целые ненулевые числа m, p можно подобрать: например, так: $m=n^2,\ p=-q^2$.

7.4. Прямоугольник разрезали двумя перпендикулярными разрезами на четыре меньших прямоугольника. Известно, что у трех из этих маленьких прямоугольников и площадь и периметр – числа целые. Верно ли, что у четвертого прямоугольника **а)** периметр – целое число; **б)** площадь – целое число?



Ответ: **а)** верно; **б)** не верно. **Решение**. **а)** Пусть $ABCD$ – исходный прямоугольник и P – его периметр. Среди трех маленьких (известных) прямоугольников рассмотрим два прямоугольника, содержащие противоположные вершины исходного прямоугольника; пусть это будут вершины A и C. Периметры этих прямоугольников обозначим P_A и P_C. Тогда $P_A+P_C=P$ (это следует из сложения составляющих сторон) и, аналогично, $P_B+P_D=P$. Отсюда, четвертый прямоугольник (для определенности, содержащий вершину D) имеет периметр $P_D=P_A+P_C-P_B$, т.е. целое число. **б)** См. пример на рисунке. Здесь площадь трех прямоугольников равна соответственно 4; 2; 1, а площадь четвертого равна 1/2.

7.5. **а)** Первоклассник Петя учится считать. Он хочет найти количество всех квадратов 2×2 (клетки) на шахматной доске 8×8. Какое число у него должно получиться? **б)** Петя расставил произвольным образом 16 пешек на клетках доски. Могло ли оказаться так, что среди всех квадратов 2×2 (см. пункт а)) есть только один, в котором ровно одна пешка, а в остальных квадратах 2×2 – четное количество пешек (возможно, ноль)?



Ответ: **а)** 49; **б)** могло. **Решение**. **а)** Квадрат ; 2×2 определяется положением его левой нижней вершины (узловой точки). Такая вершина может быть любой узловой точкой квадрата 6×6, который получится, если из квадрата 8×8 вырезать верхнюю и правую полоски шириной 2 клетки. У квадрата 6×6, очевидно, $49=7^2$ узлов. **б)** См. пример на рисунке (крестиком отмечены клетки, где стоят пешки).

8 класс

8.1. На футбольном поле встретились две команды – «Торпедо» и «Старт», по 11 человек в каждой. Средний рост игроков «Торпедо» на 2 см больше среднего роста игроков «Старта». После того, как судья удалил с поля по одному игроку каждой команды, средний рост у команд на поле сравнялся. Насколько выше удаленный игрок «Торпедо» удаленного игрока «Старта»??

Ответ: на 22 см. **Решение**. См. задачу 7.2.

8.2. В копилке 1000 монет достоинством в 1 руб., 2 руб. и 5 руб. на общую сумму 2000 руб. Сколько в копилке монет каждого достоинства, если известно, что количество однорублевых монет – простое число?

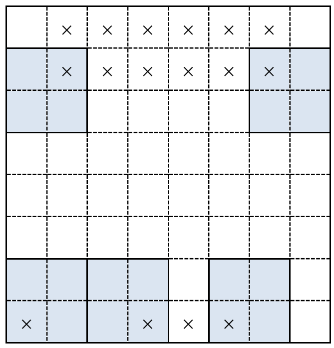
Ответ: однорублевых монет – 3, двухрублевых – 996, пятирублевых – 1. **Решение.** Пусть монет достоинством 1 руб. – x, 2 руб. – y, 5 руб. – z. Тогда $x + y + z = 1000$ и $x + 2y + 5z = 2000$. Вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 2. Получим $x = 3z$. Таким образом, из условия о простоте числа x следует, что $x = 3$, и значит $z = 1$. Тогда из данных уравнений получим $y = 996$.

8.3. Прямоугольник разрезали двумя перпендикулярными разрезами на четыре меньших прямоугольника. Известно, что у трех из этих маленьких прямоугольников и площадь и периметр – числа целые. Верно ли, что у четвертого прямоугольника **а)** периметр – целое число; **б)** площадь – целое число

Ответ: **а)** верно; **б)** не верно. **Решение**. См. задачу 7.4

8.4. **а)** Первоклассник Петя учится считать. Он хочет найти количество всех квадратов 2×2 (клетки) на шахматной доске 8×8. Какое число у него должно получиться? **б)** Петя расставил произвольным образом 16 пешек на клетках доски. Могло ли оказаться так, что среди всех квадратов 2×2 (см. пункт а)) есть только пять, в каждом из которых ровно одна пешка, а в остальных квадратах 2×2 – четное количество пешек (возможно, ноль)?

Ответ: **а)** 49; **б)** могло. **Решение**. **а)** См. задачу 7.5а). **б)** Возможный пример см. на рисунке (крестиком отмечены клетки, на которых стоят пешки).



8.5. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$. На стороне AC отмечена точка M такая, что $AM = BC$. Найдите $\angle MBC$.

Ответ: 20°. **Решение**. Покажем сначала, что $BM = BC$. Для этого проведем окружность радиуса, равного BC, с центром в точке B и пусть M_1 –точка пересечения этой окружности с отрезком AC (отличная от C). Докажем, что M_1 совпадает с M. Действительно, так как $\angle BM_1C = \angle BCA = 180° – 40° – 60° = 80°$, то по свойству внешнего угла, $\angle ABM_1 = 80° – 40° = 40°$ и поэтому $\Delta\ ABM_1$ – равнобедренный: $AM_1 = BM_1 = BC$ и значит, M_1 совпадает с M. Таким образом, $\angle MBC = 180° – 80° – -80° = 20°$

9 класс

9.1. В копилке 1000 монет достоинством в 1 руб., 2 руб. и 5 руб. на общую сумму 2000 руб. Сколько в копилке монет каждого достоинства, если известно, что количество однорублевых монет – простое число?

Ответ:. однорублевых монет – 3, двухрублевых – 996, пятирублевых – 1. **Решени**е. См. задачу 8.2.

9.2. Существуют ли действительные числа *x, y*, удовлетворяющие уравнению $x^2+7y^2+1=5xy$?

Ответ: не существуют. **Решение.** Если рассмотреть данное равенство как квадратное уравнение относительно неизвестного *x*, то его дискриминант равен $(5y)^2-4(7y^2+1)=-3y^2-4<0$ при всех y.

9.3. На координатной плоскости построена окружность с диаметром *OA*, где *O* – начало координат, а точка *A* имеет целые координаты (*m; n*). Через точку *A* проведена прямая, пересекающая окружность в точке *M* так, что $\angle MAO$ = 15°. **а)** При любых ли целых *m, n* площадь треугольника *OAM* – число рациональное? **б)** Существуют ли нечетные *m* и *n*, для которых S_{OAM} – целое число??

Ответ: **а)** при любых. **б)** не существуют. **Решение. а)** Пусть *R* – радиус данной окружности, а точка *P* – ее центр. Тогда $MP=R=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$. Угол *OPM* равен 30° как центральный для данного вписанного угла *MAO* (или как угол при вершине в равнобедренном треугольнике *MPA* с углами при основании 75°). Поэтому высота из точки *M* равна $\frac{R}{2}$ (как половина гипотенузы). Итак,

$$S_{OMA}=\frac{1}{2}\cdot(2R)\cdot\frac{R}{2}=\frac{R^2}{2}=\frac{m^2+n^2}{8} \qquad (*)$$

т.е. число рациональное. **б)** Если $m=2k+1,\ n=2l+1$, то в правой части формулы (*) в числителе будет число $4(k^2+l^2+k+l)+2$, которое не делится на 4 (и тем более, на 8). **Замечание**. Выражение для S_{OAM} можно было получить, используя для площади этого прямоугольного треугольника формулу синуса двойного угла).

9.4. Дан треугольник *ABC*, в котором $\angle A$ = 40°, $\angle B$ = 60°. На стороне *AC* отмечена точка *M* такая, что *AM* = *BC*. Найдите $\angle MBC$.

Ответ: 20°. **Решение**. См. задачу 8.5.

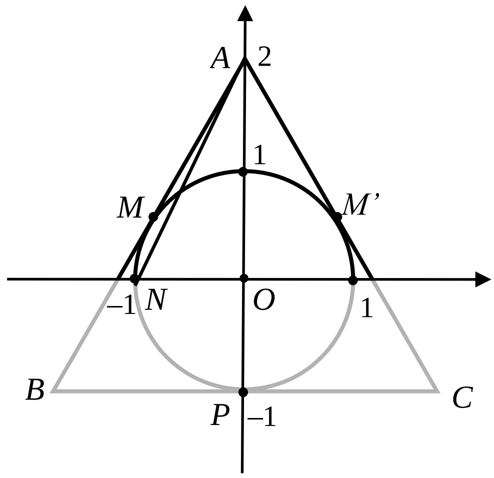
9.5. **а)** Докажите, что число $N=2^{2018}+1$ составное; **б)** докажите, что *N* имеет не менее трех различных простых делителей **.**

Решение.: **а)** *N* делится на 5, что следует, например, из рассмотрения последней цифры, т.к. $2^2+1=5$ и $2^{2018}+1=(2^2)^{1009}+1$ делится на 2^2+1 (поскольку 1009– число нечетное). **б)** .Дополним *N* до полного квадрата: $N=2^{2018}+1=2^{2018}+2\cdot2^{1009}+1-2^{1010}=\left(2^{1009}+1\right)^2-\left(2^{505}\right)^2=\left(2^{1009}+1-2^{505}\right)\left(2^{1009}+1+2^{505}\right)$. Обозначим через *A* и *B* первый и второй сомножитель соответственно. Эти сомножители взаимно просты, т.к. их разность равна 2^{506}, а сами сомножители нечетные. Второй из сомножителей, т.е. *B*, делится на 5. Действительно, при делении на 5 число 2^{1009} даёт остаток 2 (т.к. 2^{1008} даёт остаток 1), и, аналогично, 2^{505} даёт остаток 2. (Удобнее это доказывать, пользуясь свойствами сравнений по модулю, но можно доказать и непосредственно, исходя из того, что 2^2 имеет вид $5k-1$ и при умножении чисел такого вида четное количество раз получаются числа вида $5k+1$). Число *A* не делится на 5, т.к. отличается от *B* на степень двойки. Поэтому имеем разложение $N=A\cdot5\cdot\frac{B}{5}$ на три множителя, и для того, чтобы показать, что эти три множителя делятся на разные простые числа, достаточно проверить, что *B* не делится на 25. Поскольку $2^{10}=1024$ имеет вид $25k-1$, то $2^{1000}=(2^{10})^{100}$ будет иметь вид $25k+1$ (даёт остаток 1 при делении на 25, т.к. степень 100 четная), и поэтому $2^{1009}=2^{1000}\cdot512$ будет иметь вид $25k+12$. Аналогично, 2^{505} будет иметь вид $25k+32$. Таким, образом, при делении на 25 число *B* даёт остаток 12+32+1=45.

10 класс

10.1. Существуют ли действительные числа *x*, *y*, удовлетворяющие уравнению $x^2+7y^2+1=5xy$?

Ответ: не существуют. **Решение**. См. задачу 9.2.



10.2. Найдите все значения параметра *a*, для которых уравнение $\sqrt{1-x^2}=ax+2$ имеет ровно один корень.

Ответ: $a=\pm\sqrt{3};\ |a|>2$. **Решение**. *Алгебраический* способ решения сводится к возведению уравнения в квадрат, приравниванию к нулю дискриминанта квадратного уравнения (это соответствует единственному корню и дает значения $a=\pm\sqrt{3}$) и затем проверке для корней неравенства $ax+2\geq 0$ (если для обоих корней неравенство выполняется, то возведение в квадрат приводит к равносильному уравнению и, значит, есть два корня). *Графический (геометрический)* способ проиллюстрирован на рисунке. Значения *a*, для которых прямая (с угловым коэффициентом *a*) через точку *A*(0;2) пересекает в одной точке верхнюю полуокружность единичного радиуса с центром в *O*, соответствует либо касанию окружности, либо наклону, большему (по модулю), чем наклон прямой *AN* (*N* имеет координаты (–1;0)), т.е. при $|a|>2$. Для нахождения угла между касательными $\angle MAM'$ можно заметить, что равнобедренный треугольник *BAC*, описанный около данной окружности, является равносторонним, т.к. точка *O* одновременно является точкой пересечения медиан (поскольку *AO*:*OP* =2:1).

10.3. В треугольнике *ABC* проведена медиана *BM*. Можно ли утверждать, что треугольник *ABC* равнобедренный, если известно, что **а)** $R_{ABM}=R_{CBM}$; **б)** $r_{ABM}=r_{CBM}$, где *R* и *r* – радиусы описанной и вписанной окружностей соответствующих треугольников?

Ответ: **а)** можно. **б)** можно. **Решение**. **а)** Имеем $AM=2R_{ABM}\sin\angle ABM$, $CM=2R_{CBM}\sin\angle CBM$. Таким образом, из условия задачи получаем $\sin\angle ABM=\sin\angle CBM$. Отсюда либо $\angle ABM=\angle CBM$, либо $\angle ABM=180°-\angle CBM$, но второе невозможно, т.к. иначе $\angle B=180°$. Итак, медиана *BM* является и биссектрисой и, значит, *AB* = *BC*. **б)** Поскольку площади треугольников *ABM* и *CBM* равны, то по формуле площади через радиус вписанной окружности и полупериметр будем иметь $S_{ABM}=p_{ABM}\cdot r_{ABM}$ = $p_{CBM}\cdot r_{CBM}=S_{CBM}$. Отсюда $p_{ABM}=p_{CBM}$, т.е. *AB* + *BM* + *AM* = *BC* + *BM* + *CM*. Значит, *AB* = *BC*.

10.4. **а)** Докажите, что если квадратный трехчлен $P(x)$ принимает целые значения при всех целых *x,* то все его ненулевые коэффициенты по модулю больше или равны 0.5. **б)** Существует ли такой многочлен пятой степени, принимающий целые значения при всех целых аргументах, у которого все коэффициенты по модулю меньше 0.05?

Ответ: **б)** существует. **Решение**. **а)** Пусть $P(x)=ax^2+bx+c$. Тогда $c=P(0)$ – целое число. Подставляя $x=\pm 1$, получим, что $P(-1)+P(1)=2a+2c$. Значит, $2a$ – целое число, и поэтому $|a|\geq\frac{1}{2}$. Далее, $P(1)-P(-1)=2b$ –.тоже целое число и поэтому при $b\neq 0$ получаем $|b|\geq 0.5$. **б)** В качестве примера рассмотрим многочлен

$$P(x)=\frac{(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)}{5!}=\frac{1}{120}x(x^2-1)(x^2-4)=\frac{x^5-5x^3+4x}{120}$$

Все его коэффициенты по модулю не больше $\frac{1}{24}<0.05$, а значения $P(n)$ при целых *n* являются целыми. Это следует из того, что произведение любых *n* последовательных целых чисел делится на *n*!. **Замечание**. В данном случае можно непосредственно проверить делимость произведения пяти последовательных чисел на 3; 5 и 8, а значит, на их произведение. Действительно, среди любых трех последовательных чисел есть кратное 3; среди любых пяти есть кратное 5; а среди любых четырех есть кратное 4; а также другое (отстоящее на два) кратное 2.

10.5. Дано число $N=1^{25}+2^{25}+\ldots+24^{25}$. Найдите две его последние цифры;

. **Ответ**: **а)** два нуля; **Решение**. Воспользуемся тождеством

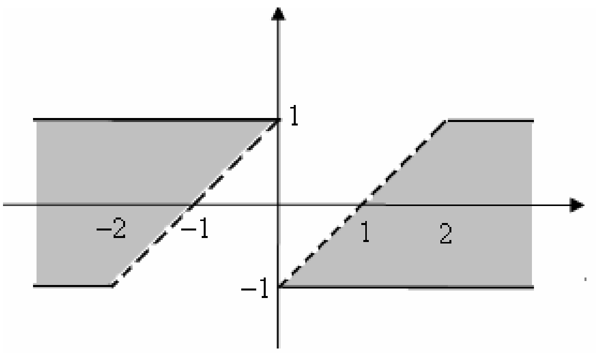
$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+...-ab^{2n-1}+b^{2n}) \qquad (*)$$

Если взять $a=1,\ b=24,\ n=12$, то получим, что $1^{25}+24^{25}$ делится на 25. Аналогично, сумма $2^{25}+23^{25}$ делится на 25, и так далее: сумма вида $k^{25}+(25-k)^{25}$ для $k=1,2,...,12$ делится на 25. Делимость на 4 следует из того, что все слагаемые $2^{25}+4^{25}+...+24^{25}$ делятся на 4 (они делятся даже на 2^{25}), а слагаемые $(1^{25}+3^{25})+(5^{25}+7^{25})+...+(21^{25}+23^{25})$ делятся на 4 в силу (*). Итак, N делится на $25\cdot 4=100$.

11 класс

11.1. . Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{x^2-2xy} > \sqrt{1-y^2}$

Решение. Данное неравенство равносильно системе: $\begin{cases} x^2-2xy > 1-y^2 \\ 1-y^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 > 1 \\ |y| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ либо $\begin{cases} x-y > 1 \\ |y| \le 1 \end{cases}$, либо $\begin{cases} x-y < -1 \\ |y| \le 1 \end{cases}$. Решение совокупности данных двух систем изображено на рисунке.



11.2. Найдите все значения параметра *a*, для которых уравнение $\sqrt{1-x^2} = ax+2$ имеет ровно один корень..
Ответ: $a = \pm\sqrt{3};\ |a| > 2$. **Решение**. См. задачу 10.2.

11.3. В треугольнике *ABC* проведена медиана *BM*. Можно ли утверждать, что треугольник *ABC* равнобедренный, если известно, что **а)** $R_{ABM} = R_{CBM}$; **б)** $r_{ABM} = r_{CBM}$, где *R* и *r* – радиусы описанной и вписанной окружностей соответствующих треугольников?
Ответ: **а)** можно. **б)** можно. **Решение**. См. задачу 10.3.

11.4. .Дана последовательность $a_1 = \cos 10°$, $a_2 = \cos 100°, \ldots,$ $a_n = \cos(10^n)°$ (градусов). **а)** Определите знак числа a_{100}; **б)** Докажите, что $|a_{100}| < 0{,}18$.

Ответ: **а)** $a_{100} > 0$. **Решение**. Покажем, что начиная с третьего члена последовательность становится постоянной: $a_3 = a_4 = a_5 = \ldots = a_{100}$. Действительно, при $n \ge 3$: $10^{n+1} - 10^n = 9\cdot 10^3 \cdot 10^{n-3} = 360\cdot 25\cdot 10^{n-3}$, т.е. углы отличаются на величину, кратную 360°. Таким образом, нетрудно определить знак $\cos 1000° = \cos(360°\cdot 3 - 80°) = \cos 80° = \sin 10° > 0$. **б)** Воспользуемся известным неравенством $\sin x < x$ при всех *x* > 0 (здесь *x* – угол в радианах). (Это неравенство обычно доказывается при выводе первого замечательного предела; другой способ доказательства – рассмотреть функцию $y = x - \sin x$, которая возрастает, т.к. $y' = 1 - \cos x \ge 0$ и *y*(0) = 0.) Таким образом, $0 < \sin 10° = \sin\frac{10}{180}\pi < \frac{\pi}{18} < 0{,}18$; т.к. $18\cdot 0{,}18 = 3{,}24 > \pi$

11.5. Дано число $N = 1^{25} + 2^{25} + \ldots + 24^{25}$. Найдите **а)** две последние цифры числа *N*; **б**) четыре его последние цифры.
Ответ: **а)** два нуля; **б)** четыре нуля. **Решение. а**) см. задачу 10.5**. б)** Докажем, что *N* делится на 10^4. Делимость на 5^4 докажем, используя бином Ньютона: имеем $1^{25} + 24^{25} = 1 + (-1+25)^{25} = 1 - 1 + 25\cdot 25 - C_{25}^2(25)^2 + C_{25}^3(25)^3 - \ldots + 25^{25}$. Эта сумма, очевидно, делится на 25^2. Аналогично, на 25^2 делятся суммы вида $k^{25} + (25-k)^{25}$ для $k = 1,2,\ldots,12$. Делимость на 16 получим с помощью формулы (*) (см. задачу 10.5). Применим её для 6 пар нечетных слагаемых $1^{25}+23^{25}, 3^{25}+21^{25}, \ldots, 11^{25}+13^{25}$. Для каждой

такой пары первая скобка в правой части (*) (см. решение задачи 10.5) равна 24, а вторая скобка представляет собой сумму (с чередующимися знаками) двадцати пяти нечетных чисел, т.е. число нечетное. Поэтому сумма всех этих шести пар равна произведению 24 на сумму шести нечетных чисел, и значит, делится на $24 \cdot 2 = 16 \cdot 3$ Таким образом, N делится на 16 (т.к. делимость на 16 слагаемых $2^{25} + 4^{25} + \ldots + 24^{25}$ очевидна).