Муниципальное общеобразовательное учреждение
Средняя образовательная школа №1

Научно-исследовательский проект

«Исследование свойств приведенных степенных уравнений»

Моргунов Михаил,
10 класс

Научный руководитель:
Киселева Тамара, Сергеевна,
учитель математики

Кулебаки
2010 г.

Оглавление

I. Введение ... 3

II. Исследование свойства приведенных степенных уравнений

Глава 1. Исследование квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ ... 5

Глава 2. Теоремы о расположении корней квадратного трехчлена

§ 1. Теорема 1 ... 7

§ 2. Теорема 2 ... 9

§ 3. Теорема 3 ... 11

§ 4. Теорема 4 ... 13

Глава 3. Исследование кубического уравнения $x^3+px+q=0$ ... 16

Глава 4. Исследование уравнения четвертой степени $x^4+px+q=0$

§1. Исследование уравнения $x^4+px+q=0$

1.1. Первый способ нахождения огибающей уравнения $x^4+px+q=0$ ... 21

1.2. Второй способ нахождения огибающей уравнения $x^4+px+q=0$ ... 22

1.3. Корневые прямые огибающей ... 23

§ 2. Исследование уравнения $x^4+x^2+px+q=0$

2.1. График функции $y= x^4+x^2+px+q$ ... 26

2.2. Корневые прямые огибающей ... 27

§ 3. Исследование уравнения $y= x^4-x^2+px+q=0$

3.1. График функции $y=x^4-x^2+px+q$ ... 30

3.2. Корневые прямые огибающей ... 31

Глава 5. Применение сетчатых номограмм ... 35

III. Заключение ... 36

IV. Литература ... 37

I. Введение

Актуальность.

Характерный облик параболы известен всем. Форму параболы принимает струя воды, бьющая из шланга, по параболе летит мяч или камень, брошенные под углом к горизонту. Выражаясь языком механики, парабола – это траектория движения материальной точки, брошенной в наклонном или горизонтальном направлении и падающей под действием силы притяжения Земли. При описании этих и многих других физических явлений необходимо уметь решать квадратные уравнения.

Проблема.

На вступительных экзаменах по математике задачи с параметрами, прямо или косвенно связанные с квадратным трехчленом, предлагаются довольно часто. Школьники, конечно, хорошо знают все формулы, относящиеся к квадратному трехчлену, однако зачастую задача решается с трудом, так как задачи такого типа требуют исследования.

Гипотеза.

Если по определению принять, что огибающая семейства корневых прямых уравнения.

$x^2 + px + g = 0$ является геометрическим местом точек (p;g), каждая из которых соответствует уравнению с кратными корнями, то возможно обобщение метода построения сетчатых номограмм для приведенных степенных уравнений третьей и четвертой степени.

Объектом нашего исследования являются приведенные степенные уравнения.

Цель.

Обобщить метод построения сетчатых номограмм для приведенных степенных уравнений

$x^3 + px + g = 0$, $x^4 + px + g = 0$, $x^4 \pm x^2 + px + g = 0$.

Задачи:

1. На фазовой плоскости π нарисовать «картинки», соответствующие теоремам 1 – 4 о расположении корней квадратного трехчлена, задавая числам m, μ, M, конкретные значения;
2. Вывести уравнения, огибающих для приведенных уравнений
   $x^3 + px + g = 0$, $x^4 \pm x^2 + px + g = 0$.
3. Построить сетчатые номограммы для приведенных степенных уравнений
   $x^3 + px + g = 0$, $x^4 \pm x^2 + px + g = 0$.

При исследовании числа корней приведенного квадратного уравнения, мы решили построить сетчатые номограммы, где огибающей является дискриминантная парабола. В качестве самопроверки попробовали нарисовать «картинки», соответствующие теоремам о расположении корней квадратного трехчлена:

1. Теорема 1

   Корни квадратного трехчлена $ax^2+bx+c=0$ действительны и оба больше данного числа m тогда и только тогда, когда выполняется система:

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geq 0 \\ a \cdot f(m) = a(am^2 + bm + c) > 0 \\ m + \dfrac{b}{2a} < 0 \end{cases}$$

2. Теорема 2

   Корни квадратного трехчлена $ax^2+bx+c=0$ действительны и оба меньше данного числа M тогда и только тогда, когда выполняется система:

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geq 0 \\ a \cdot f(M) = a(aM^2 + bM + c) > 0 \\ M + \dfrac{b}{2a} > 0 \end{cases}$$

3. Теорема 3

   Корни квадратного трехчлена $ax^2+bx+c=0$ действительны и оба принадлежат промежутку (m; M) тогда и только тогда, тогда выполняется система:

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geq 0 \\ a \cdot f(M) = a(aM^2 + bM + c) > 0 \\ a \cdot f(m) = a(am^2 + bm + c) > 0 \\ m + \dfrac{b}{2a} > 0 \\ M + \dfrac{b}{2a} > 0 \end{cases}$$

4. Теорема 4

   Для того, чтобы один из корней квадратного трехчлена $ax^2+bx+c=0$ был меньше, чем число М, а другой больше, чем число М (т.е. точка М лежала бы между корнями), необходимо и достаточно выполнение условий:

$$af(M)=a(aM^2+bM+c)<0.$$

Однако, кроме квадратных уравнений мы решили исследовать уравнения третьей и четвертой степени. Если по определению принять, что огибающая семейства корневых прямых уравнения $x^2 + px + q = 0$ является геометрическим местом точек (p;q), каждая из которых соответствует уравнению с кратными корнями, то возможно обобщение метода построения сетчатых номограмм для приведенных степенных уравнений третьей и четвертой степени

$x^3 + px + q = 0$, $x^4 + px + q = 0$, $x^4 \pm x^2 + px + q = 0$.

Исследование свойств приведенных степенных уравнений

Глава I. Исследование квадратного уравнения

Построим сетчатую номограмму для квадратного уравнения $Ax^2+Bx+C=0$, $A\neq0$. Разделив все члены на A, наше уравнение можно заменить равносильным уравнение $x^2+px+q=0$ **(1)**.

Условимся, что будем говорить только о действительных корнях уравнения. Если придать x какое-либо постоянное значение, то на плоскости (p, q) можно начертить «корневую» линию. Например, подставляя x=1, получим линию уровня соответствующую корню 1: 1+p+q=0. Тоже самое будет при всех других постоянных значениях x — будет вырисовываться корневая прямая.

Для каждого значения x найдется своя корневая прямая, причем только одна.

Дадим x несколько значений и начертим соответствующие прямые:

Значение x	Уравнение прямой
0	q=0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}p+q=0$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}p+q=0$
1	1+p+q=0
–1	1–p+q=0
2	4+2p+q=0
–2	4–2p+q=0

Таблица 1

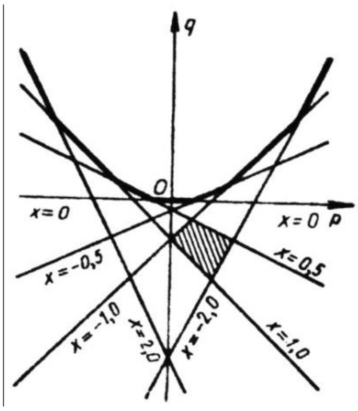


Рис. 1

В результате получится хотя и грубое, но все же некоторое представление о нашей номограмме. И уже на очень грубом чертеже видно, что корневые прямые «вырисовывают» некоторую кривую, которая приближенно изображается на этом рисунке жирной ломаной.

Если брать более частые значения x, то нетрудно догадаться, что это обычная парабола.

Корневые прямые являются касательными этой параболы, в силу чего ее называют огибающей множества коневых прямых.

Теперь точнее об огибающих.

Рассматривая номограмму квадратного уравнения, можно было заметить, что огибающая семейства корневых прямых — квадратичная парабола. Докажем это.

Огибающая разбивает плоскость номограммы на две области. Одна область состоит из точек, лежащих внутри огибающей, другая — из внешних точек. Точки самой огибающей не включаем ни в одну из областей. Первую область назовем внутренней, вторую — внешней.

Так как внутренняя область выпукла, то ни через одну точку этой области нельзя провести касательной к огибающей, — это значит, что любая внутренняя точка *(p, q)*, соответствует квадратному уравнению $x^2+px+q=0$, которое не имеет корней.

Сравним это наблюдение с формулой для корней квадратного уравнения

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

то сразу видно, что в точках внутренней области и только в них выполняется неравенство

$$\frac{p^2}{4} - q < 0 .$$

Напротив, в точках внешней области можно заметить выполнение противоположного неравенства

$$\frac{p^2}{4} - q > 0 .$$

Тогда для точек самой огибающей остается, то есть само уравнение огибающей, показывающее, что она действительно парабола.

Оказалось, что огибающая семейства корневых прямых является геометрическим местом (множеством) точек (p, q) таких и только таких, что каждая из них соответствует уравнению с совпадающими корнями.

Если за определение огибающей принять это ее свойство, то придется доказывать, что корневые прямые касаются огибающей.

Для доказательства возьмем любую корневую прямую с корнем $\boldsymbol{a}$. Из определения огибающей следует, что любая точка (p, q) соответствует квадратному уравнению с корнем $\boldsymbol{a}$. Но это квадратное уравнение имеет и еще один корень $\boldsymbol{x_2}$ и его значение может не совпадать с корнем $\boldsymbol{a}$, от выбора этого значение зависит положение точки (p, q). Если же $\boldsymbol{x_2 \neq a}$, то точка (p, q) находится под огибающей, то есть через нее проходит две корневые прямые. Если $\boldsymbol{x_2 = a}$, то два уравнения с корнями $\boldsymbol{x_2}$ и $\boldsymbol{a}$ на графике сливаются в одну корневую прямую. Докажем это вычислениями:

$$\begin{cases} q = \dfrac{p^2}{4} \\ a^2 + ap + q = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} q = \dfrac{p^2}{4} \\ 4a^2 + 4ap + p^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} q = a^2 \\ p = -2a \end{cases},$$

то есть корневая прямая является касательной к огибающей в точке ($\boldsymbol{-2a}$, $\boldsymbol{a^2}$).

Эта точка — общая для корневой прямой, где $\boldsymbol{x_2 = a}$, и огибающей.

Так как корневая прямая с корнем $\boldsymbol{a}$ была выбрана произвольно, то доказанное верно для любой такой прямой.

Для доказательства не существенно, что уравнение **(1)** — квадратное. Запишем наше уравнение как

$$F_{(x,\ p,\ q)} = 0.$$

Главное, чтобы при любом постоянном x ($x = const$) линия уровня была прямой, а также при любых p и q исходное уравнение имело два

Вывод: через любую точку огибающей проходит только одна корневая прямая; через любую точку ниже огибающей проходит две корневых прямых; через любую точку выше огибающей ни одной корневой прямой не проходит.

Глава II. Теоремы о расположении корней квадратного уравнения

§1. Теорема1

Корни квадратного трехчлена $ax^2+bx+c=0$ действительны и оба больше данного числа m тогда и только тогда, когда выполняется система:

или в символьном виде:

$m < x_1 \le x_2$

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \ge 0 \\ a \cdot f(m) = a(am^2 + bm + c) > 0 \\ m + \dfrac{b}{2a} < 0 \end{cases}$$

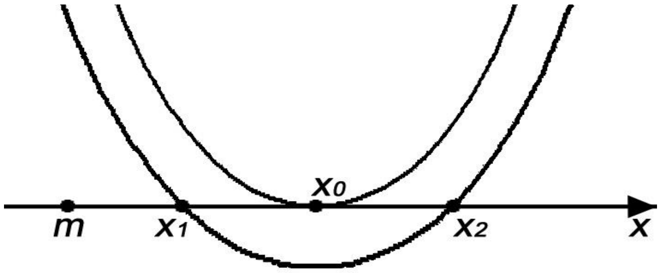


Рис. 2

Эту теорему изобразим на рисунке для квадратного трехчлена x^2+px+q.
Итак,

$$m < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{4} = \dfrac{p^2}{4} - q \ge 0 \\ f(m) = m^2 + pm + q > 0 \\ m + \dfrac{p}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{p^2}{4} - q \ge 0 \\ m^2 + pm + q > 0 \\ \dfrac{p}{2} < -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q \ge \dfrac{p^2}{4} \\ m^2 + pm + q > 0 \\ p < -2m \end{cases}$$

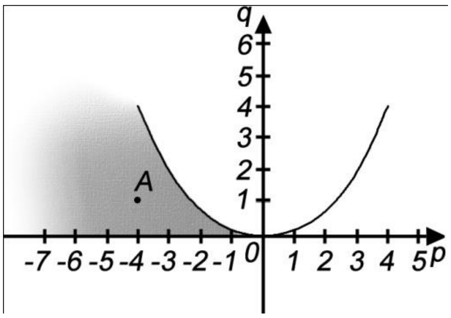


Рис. 3

Рассмотрим последнюю систему, придав значение m=0; $\pm\frac{1}{2}$; ±1; $\pm1\frac{1}{2}$; ±2; $\pm2\frac{1}{2}$; ±3…

$$\begin{cases} m = 0 \\ q \ge \dfrac{p^2}{4} \\ q > 0 \\ p < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 1 \\ p + q + 1 > 0 \\ p < -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m = -1 \\ q > p - 1 \\ p < 2 \end{cases}$$

Пусть возьмем точку А (–4;1), то есть p= –4, q=1, тогда

$x^2 – 4x+1=0$

$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt{3}$

$x_1=2+\sqrt{3}$; $x_2=2-\sqrt{3}$

m=0 => оба корня действительны и больше m=0

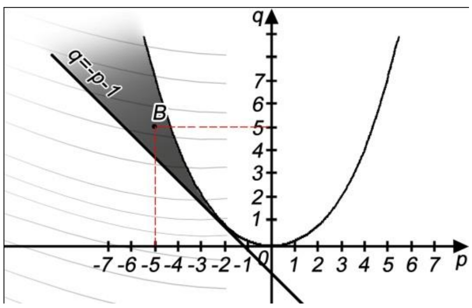


Рис. 4

Пусть возьмем точку B (–5:5), m=1.

P= –5, q=5, тогда $x^2–5x+5=0$

$$x_{1,2}=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}-5}=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\approx\frac{5+2{,}3}{2}\approx 3{,}15$$

$$x_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\approx\frac{5-2{,}3}{2}\approx 1{,}35$$

Оба корня действительны и больше m=1

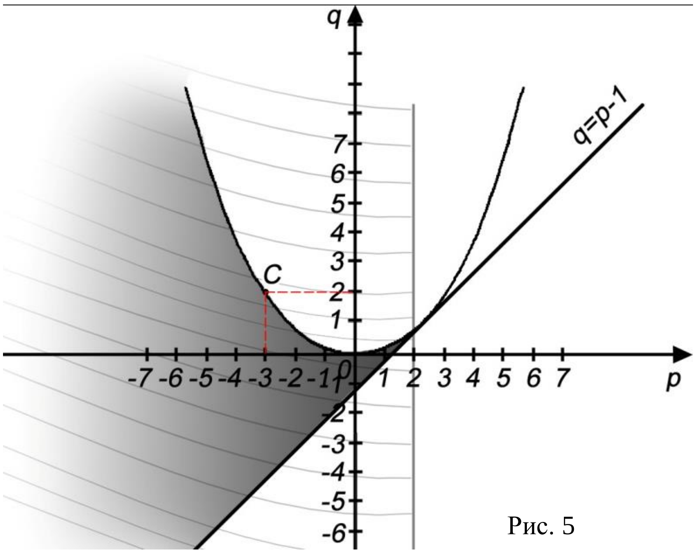


Рис. 5

$$\begin{cases} m=-1 \\ 1-p+q>0 \\ p<2 \end{cases} \quad \begin{cases} m=-1 \\ q>p-1 \\ p<2 \end{cases}$$

Возьмем точку C(–3;2), то есть p=3; q=2, тогда

x^2-3x+2=0

$$x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}$$

x_1=1, x_2=2

Оба корня действительны и больше m= –1.

§2. Теорема 2

Корни квадратного трехчлена $ax^2+bx+c=0$ действительны и оба меньше данного числа *M* тогда и только тогда, когда выполняется система:

$$x_1\le x_2\le M \quad \begin{cases} \frac{D}{4}=b^2-4ac\ge 0 \\ a\cdot f(M)=a(aM^2+bM+c>0 \\ M+\frac{b}{2a}>0 \end{cases}$$

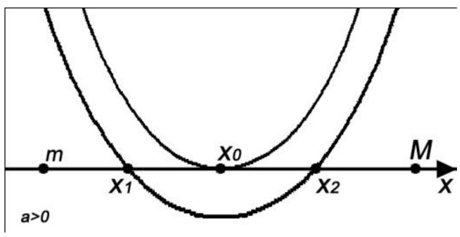
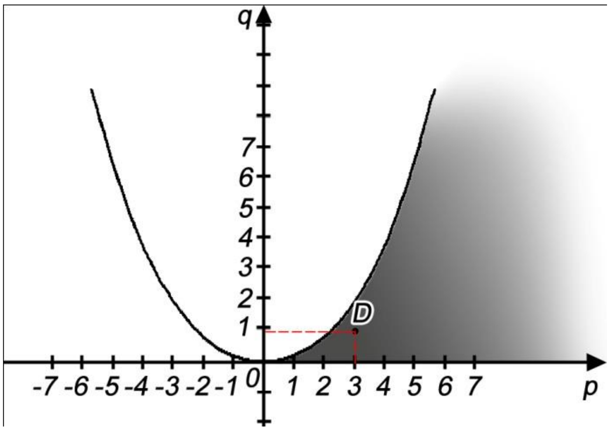


Рис. 6

Эту теорему изобразим на фазовой плоскости π для квадратного трехчлена x^2+px+q.

$$x_1 \le x_2 \le M \quad \begin{cases} \dfrac{D}{4} = \dfrac{p^2}{4} - q \ge 0 \\ f(M) = M^2 + pM + q > 0 \\ -\dfrac{p}{2} < M \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{p^2}{4} - q \ge 0 \\ M^2 + pM + q > 0 \\ P > -2M \end{cases} \quad \begin{cases} q < \dfrac{p^2}{4} \\ M^2 + pM + q > 0 \\ P > -2M \end{cases}$$

Рассмотрим последнюю систему, придав значения M=0; ±1; $\pm\dfrac{1}{2}$; …

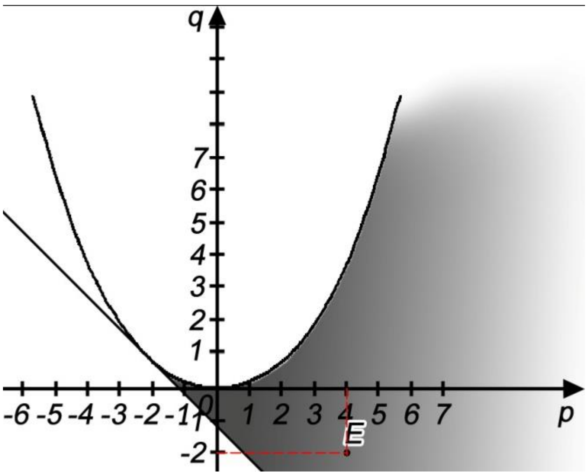


$$\begin{cases} M = 0 \\ q < \dfrac{p^2}{4} \\ q > 0 \\ p > 0 \end{cases}$$

Возьмем точку D(4;1), то есть p=4, q=1, тогда $x^2+4x+1=0$

$x_{1,2} = -2+\sqrt{4-1} = -2\pm\sqrt{3}$

Рис. 7



$x_1 = -2+\sqrt{3}$; $x_2 = -2-\sqrt{3}$

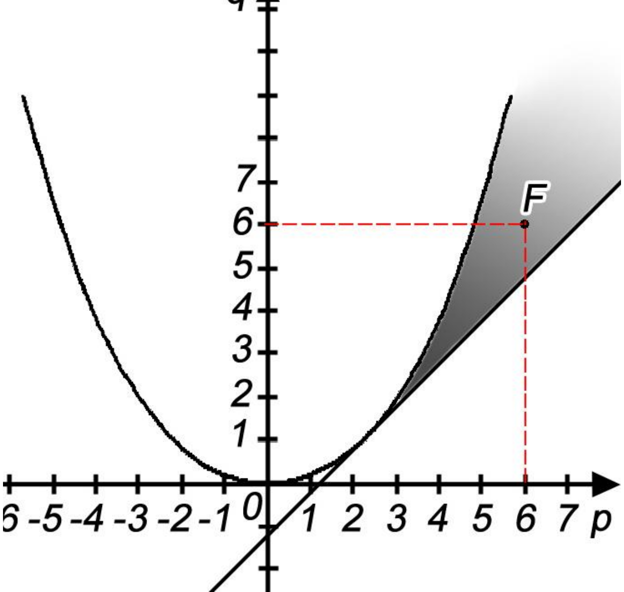
$x_1 \approx -0{,}7$; $x_2 \approx -3{,}7$

Оба корня действительны и меньше M=0.

$$\begin{cases} M = 1 \\ q < \dfrac{p^2}{4} \\ 1 + p + q > 0 \\ p > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ q < \dfrac{p^2}{4} \\ q > -p - 1 \\ p > -2 \end{cases}$$

Возьмем точку E (–4; –2), то есть p= –4, q= –2, тогда

Рис. 8



$x^2-4x-2=0$

$x_{1,2} = 2\pm\sqrt{4+2} = 2\pm\sqrt{6}$

$x_1 = 2+\sqrt{6} \approx 4{,}5$

$x_2 = 2-\sqrt{6} \approx -0{,}5$

Оба корня действительные и меньше M=1.

Рис. 9 $\begin{cases} M = -1 \\ q < \dfrac{p^2}{4} \\ 1 - p + q > 0 \\ p > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = -1 \\ q < \dfrac{p^2}{4} \\ 1 - p + q > 0 \\ p > 2 \end{cases}$

Возьмем точку F(6;6), тогда p=6, q=6, значит $x^2+6x+6=0$

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-6} = -3 \pm \sqrt{3}$

$x_1 = -3 + \sqrt{3} \approx -1{,}3$ $x_2 = -3 - \sqrt{3} \approx -4{,}7$

Рис. 9 Оба корня действительны и меньше, чем M= –1.

§3. Теорема 3

Корни квадратного трехчлена $ax^2+bx+c=0$ действительны и оба принадлежат промежутку (m; M) тогда и только тогда, тогда выполняется система:

$$m<x_1\le x_2\le M \Leftrightarrow \begin{cases} D = b^2 - 4ac \ge 0 \\ a \cdot f(M) = a(aM^2 + bM + c) > 0 \\ a \cdot f(m) = a(am^2 + bm + c) > 0 \\ m + \dfrac{b}{2a} > 0 \\ M + \dfrac{b}{2a} > 0 \end{cases}$$ или

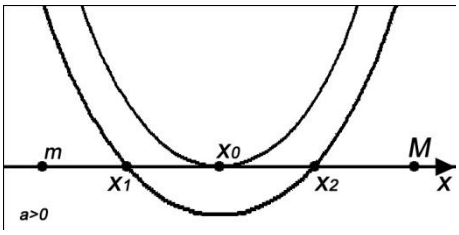


Рис. 10

$$\begin{cases} D \ge 0 \\ f(M) > 0 \\ f(m) > 0 \\ m < x_0 < M \end{cases}$$

Эту теорему изобразим на фазовой плоскости π, для квадратного трехчлена $x^2+px+q=0$.

$$m<x_1\le x_2<M \quad \begin{cases} \dfrac{D}{4}=\dfrac{p^2}{4}-q\ge 0 \\ f(M)=M^2+pM+q>0 \\ f(m)=m^2+pm+q>0 \\ -\dfrac{p}{2}>m \\ -\dfrac{p}{2}>M \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{p^2}{4}-q\ge 0 \\ M^2+pM+q>0 \\ m^2+pm+q>0 \\ p>-2M \\ p<-2m \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} q<\dfrac{p^2}{4} \\ M^2+pM+q>0 \\ m^2+pm+q>0 \\ p>-2M \\ p<-2m \end{cases}$$

Рассмотрим последнюю систему, придав значения M= $\pm\frac{1}{2}$; ±1; $\pm1\frac{1}{2}$; … m= $\pm\frac{1}{2}$; ±1; $\pm1\frac{1}{2}$; …

т.е. а) (–1;1) б) (–2;2) в) (–3;3)

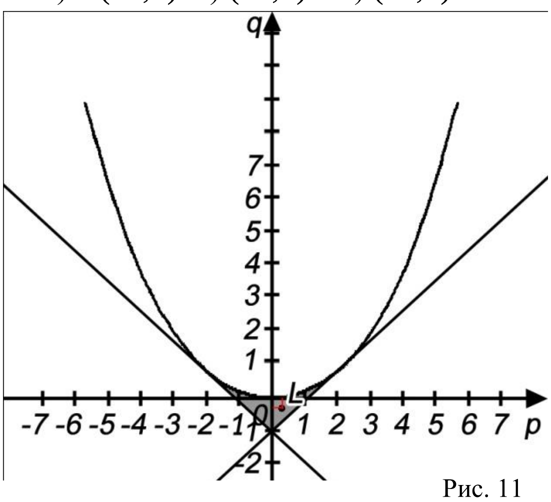


Рис. 11

. а) Пусть (–1;1) , то есть m= –1, M=1, тогда:

$$\begin{cases} M=1 \\ m=-1 \\ q<\dfrac{p^2}{4} \\ q>-p-1 \\ q>p-1 \\ p>-2 \\ p<2 \end{cases} \qquad \begin{cases} M=1 \\ m=-1 \\ q<\dfrac{p^2}{4} \\ q>-p-1 \\ q>p-1 \\ -2<p<2 \end{cases}$$

Возьмем точку L (0,3; – 0,3), тогда p=0,3, q= – 0,3, значит $x^2+0{,}3x-0{,}3=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-0{,}3\pm\sqrt{0{,}09+1{,}2}}{2}$

$x_{1,2}\approx\dfrac{-0{,}3\pm1{,}14}{2}$

$x_1\approx0{,}42$; $x_2\approx-0{,}72$ Оба корня действительны и находятся в промежутке (–1;1).

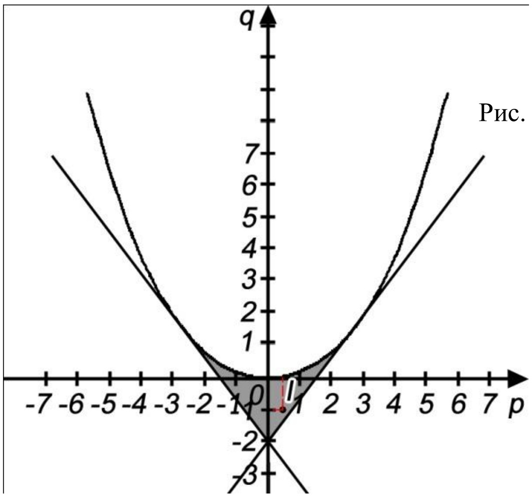


Рис. 12

б) Пусть (–2;2) то есть m= –2, M=2, тогда

$$\begin{cases} M=2 \\ m=-2 \\ q<\dfrac{p^2}{4} \\ q>-2p-4 \\ q>2p-4 \\ p>-4 \\ p<4 \end{cases} \qquad \begin{cases} M=2 \\ m=-2 \\ q<\dfrac{p^2}{4} \\ q>-2p-4 \\ q>2p-4 \\ -4<p<4 \end{cases}$$

Возьмем точку I (0,5; – 1), тогда p=0,5, q= – 1, значит $x^2+0{,}5x-1=0$

$$x_{1,2}=\frac{-0{,}5\pm\sqrt{0{,}25+4}}{2}$$

$$x_{1,2}\approx\frac{-1\pm 2{,}06}{2}$$

$x_1\approx0{,}53$; $x_2\approx -1$,оба корня действительны и находятся в промежутке (–2;2).

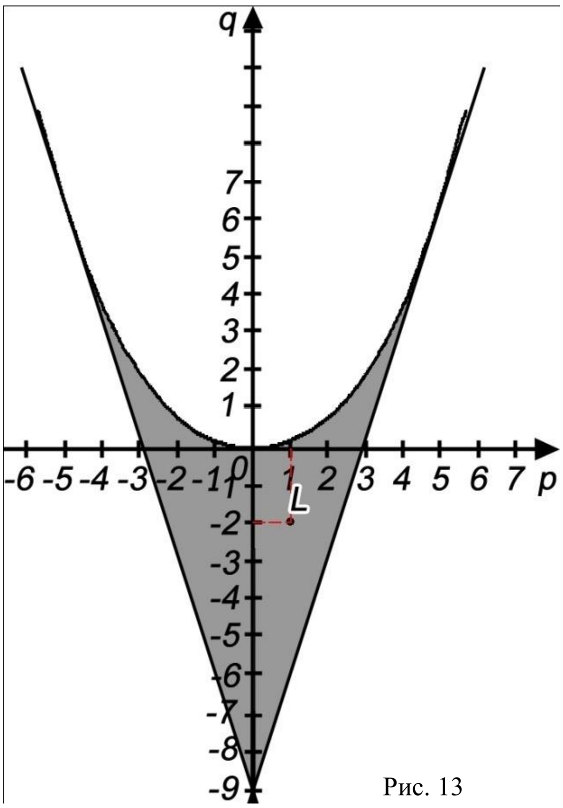


Рис. 13

в) Пусть (–3;3) то есть m= –3, M=3, тогда

$$\begin{cases} M=3 \\ m=-3 \\ q<\dfrac{p^2}{4} \\ q>-3p-9 \\ q>3p-9 \\ p>-6 \\ p<6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} M=3 \\ m=-3 \\ q<\dfrac{p^2}{4} \\ q>-3p-9 \\ q>3p-9 \\ -6<p<6 \end{cases}$$

Возьмем точку L (1; –2), тогда p=1, q= –2, значит $x^2+x-2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}$$

$x_1= -2$; $x_2= 2$, оба корни действительны и находятся в промежутке (-3;3)

§4. Теорема 4

Для того, чтобы один из корней квадратного трехчлена $ax^2+bx+c=0$ был меньше, чем число M, а другой больше, чем число M (т.е. точка M лежала бы между корнями), необходимо и достаточно выполнение условия: $x_1<M<x_2 \Leftrightarrow af M)=a(aM^2+b+c)<0$

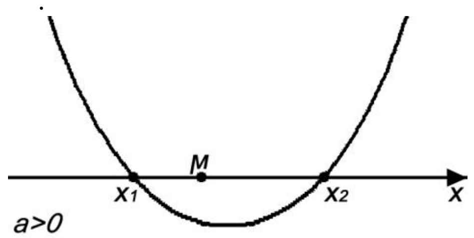


Рис14

Итак:

$f(x)=x^2+px+q \qquad f(M)= M^2+pM+q<0 \qquad M^2+pM+q<0$

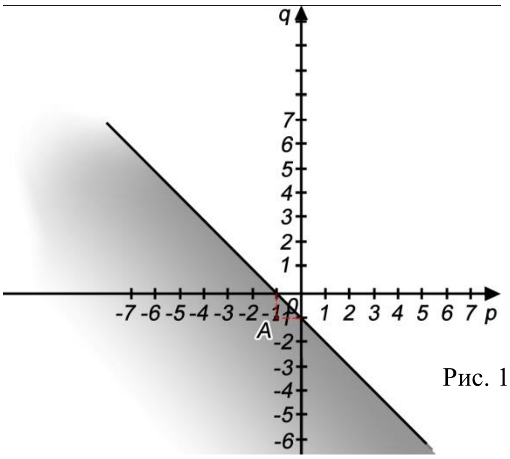


Рис. 15

Рассмотрим последнее выражение, придав значения $M = \pm\frac{1}{2}$; ±1; $\pm1\frac{1}{2}$; …

Пусть $M=1$, тогда

$1+p+q<0$

$q<-1-p$

Возьмем точку A(–1; –1), где p= –1, q= –1, тогда

$q<-1-p$

$-1< 0$, верно.

$x^2-x-1=0$

$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$x_1\approx1{,}62$; $\qquad x_2\approx -0{,}62$

Построим график функции $y=x^2-x-1$

Вершина параболы: $B(\frac{1}{2}; -1\frac{1}{4})$

Точки параболы:(1;-1), (-1;1), (2;1), (0;-1)

По графику видно, что один корень меньше числа $M=1$, когда второй больше числа M.

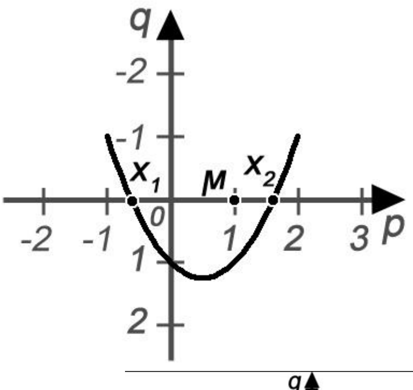
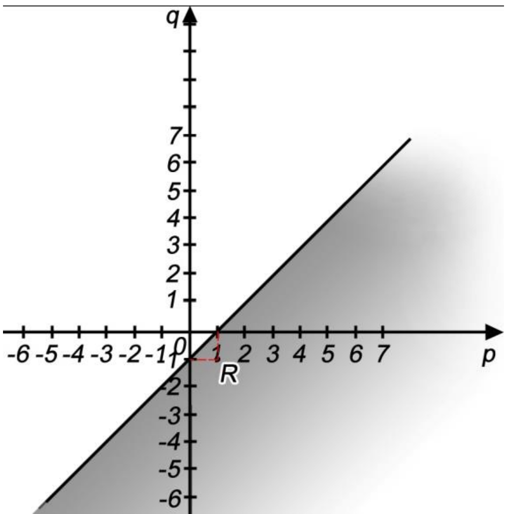


Рис.16



Пусть M= -1, тогда

$-1+p+q<0$

$q<1-p$

Возьмем точку R(1; –1), где p= 1, q= –1, тогда

$q<1-p$

$-1<0$, верно.

$x^2+x-1=0$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$

Рис. 17

$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$x_1\approx0{,}62$; $x_2\approx-1{,}62$

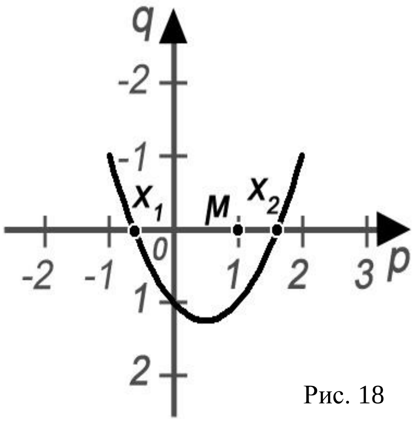


Рис. 18

Построим график функции $y=x^2+x-1$

Вершина параболы: $B(-\frac{1}{2};-1\frac{1}{4})$

Точки параболы:(1;2), (-1;-1), (-2;1), (0;-1)

По графику видно, что один корень меньше числа *M=–1*, когда второй больше числа *M*.

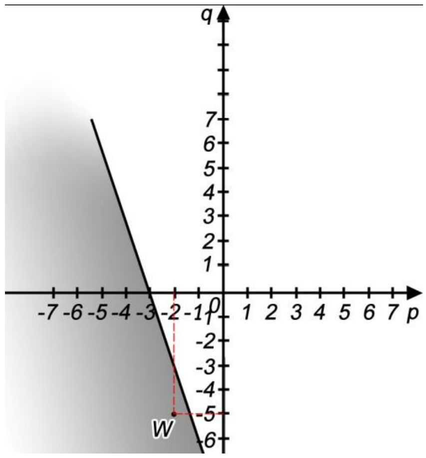


Рис. 19

Пусть *M=3*, тогда

$9+3p+q<0$

$q<-9-3p$

Возьмем точку W(–2; –5), где p= –2, q= –5, тогда

$q<-9-3p$

–2< 6, верно.

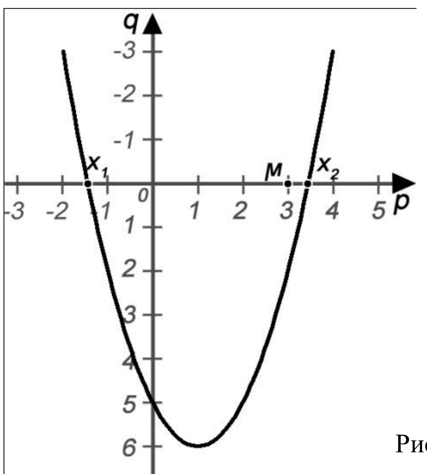
$x^2-2x-5=0$

$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+20}}{2}$

$x_1=\frac{2+4{,}9}{2}$; $x_2=\frac{2-4{,}9}{2}$

$x_1=3{,}45$; $x_2=-1{,}45$

Построим график функции $y=x^2-2x-5$



Вершина параболы: B(1;–6)

Точки параболы: (2;-5),(-1;-2),(3;-2),(-2;3),(0;-5),(4;3)

По графику видно, что один корень меньше числа *M=3*, когда второй больше числа *M*.

Рис. 20

Глава III.

Исследование кубического уравнения $x^3+px+q=0$

Чтобы найти уравнение огибающей для кубического уравнения $x^3+px+q=0$ (**2**) воспользуемся формулой куб суммы: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, введем обозначение $x=a+b$, тогда $x^3+px+q=0$ будет выглядеть:

$$x^3=a^3+b^3+3abx \text{ или}$$
$$x^3-3abx-(a^3+b^3)=0$$

Чтобы найти корень уравнения (**2**), достаточно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a^3+b^3=-q \\ 3ab=-p \end{cases} \quad \begin{cases} a^3+b^3=-q \\ a^3b^3=-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

и взять в качестве x сумму $(a+b)$. Заменой $U=a^3$, $V=b^3$ система будет иметь вид:

$$\begin{cases} U+V=-q \\ UV=-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}.$$

Тогда по теореме Виета q — второй коэффициент с противоположным знаком, а произведения корней — свободный член $-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$, тогда получается квадратное уравнение с корнями $t_{1,2}$:

$$t^2+qt-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$$

$$t_{1,2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Переменные a и b равны кубическим корням из t_1 и t_2, а искомое решение кубического уравнения (**2**) — сумма этих корней:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Корни уравнения (**2**) существуют только тогда, когда выполняется неравенство

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\geq 0.$$

Огибающая семейства прямых — это множество таких точек $(p; q)$, что уравнение $x^3+px+q=0$ имеет кратный корень. Он бывает в случае, когда $\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3=0$ — это уравнение и задает огибающую кубического уравнения.

Построение графика огибающей и ее корневых прямых

Каждому трехчлену семейства x^3+px+q с конкретными параметрами p и q построим сетчатую номограмму.

$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ (3) — огибающая, все точки которой соответствуют трехчленам, имеющим кратные (совпадающие) корни.

Путем несложных вычислений выразим q: $q=\pm 2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$ **(3)** либо $q=\pm 2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$.

Из этих равенств мы видим, что $p\le 0$, иначе q не будет являться действительным числом.

Построим номограмму по данным таблицы q от p по **(4)**:

–p	±q	–p	±q	–p	±q
0,5	0,14	3,5	2,52	6	5,7
1,5	0,7	4	3,07	6,5	6,38
2	1,09	4,5	3,67	7	7,12
2,5	1,52	5	4,3	7,5	7,9
3	2	5,5	4,49	8	8,7

Таблица 2

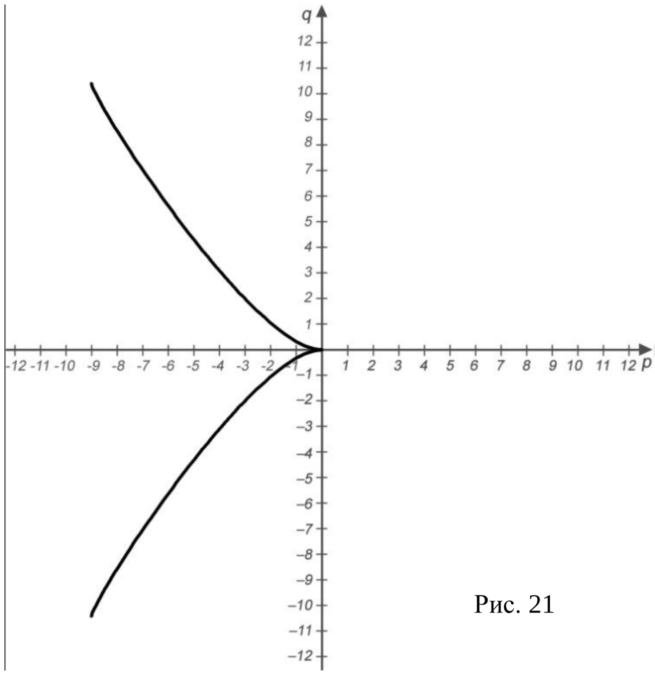


Рис. 21

2) Прямая $q+ap+a^3=0$ на плоскости π (p; q – переменные, a – фиксированный параметр) называется корневой, так как точки этой прямой соответствую трехчленам x^3+px+q, которые в качестве своего корня имеют число a.

Найдем общие точки *(p; q)* касательной и огибающей:

$x^3+px+q=(x-a)^2(x-b)$, где a — совпадающий кратный корень, а b — может быть равно a.

$$(x-a)^2(x-b)=x^3-2ax^2+bx^2+a^2x+2abx-a^2b$$

$$(x^2-2ax+x^2)(x-b)=x^3-2ax^2+bx^2+a^2x+2abx-a^2b=$$

$$=x^3-(2a+b)x^2+(a^2+2ab)x-a^2b$$

$$\begin{cases}(2a+b)=0\\ a^2+2ab=p\\ -a^2b=q\end{cases}\quad \begin{cases}p=-3a^2\\ q=2a^3\end{cases}\quad \textbf{(5)}$$

(5) — общая точка для касательной $q+ap+a^3=0$ и огибающей

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$$.

Найдем по системе **(5)** множество касательных к огибающей $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ подставляя различные значение a.

Таблица общих точек огибающей и касательной с корнем *a*:

a	*p*	*q*	*a*	*p*	*q*
0,25	–0,19	0,03	1	–3	2
–0,25	–0,19	–0,03	–1	–3	–2
0,5	–0,75	0,25	1,5	–6,75	6,75
–0,5	–0,75	–0,25	–1,5	–6,75	–6,75

Таблица 3

Таблица точек касательных $q = -ap - a^3$ (для построения на графике):

p	*q*	*p*	*q*	*p*	*q*	*p*	*q*
a=0,25		*a=1*		*a=2*		*a=3*	
1	–0,2656	1	–2	1	–10	1	–30
2	–0.5156	2	–3	2	–12	2	–33
–1	0.2343	–1	0	–1	–6	–1	–24
a=–0,25		*a=–1*		*a=–2*		*a=–3*	
1	0,2656	1	2	1	10	1	30
2	0.5156	2	3	2	12	2	33
–1	–0.2343	–1	0	–1	6	–1	24
a=0,5		*a=1,5*		*a=2,5*		*a=3,5*	
1	–0,625	1	–4,875	1	–18,125	1	–46,375
2	–1,125	2	–6,375	2	–20,625	2	–49,875
–1	0,375	–1	–1,875	–1	–13,125	–1	–39,375
a=–0,5		*a=–1,5*		*a=–2,5*		*a=–3,5*	
1	0,625	1	4,875	1	18,125	1	46,375
2	1,125	2	6,375	2	20,625	2	49,875
–1	–0,375	–1	1,875	–1	13,125	–1	39,375

Таблица 4

Некоторые из них покажем на графике:

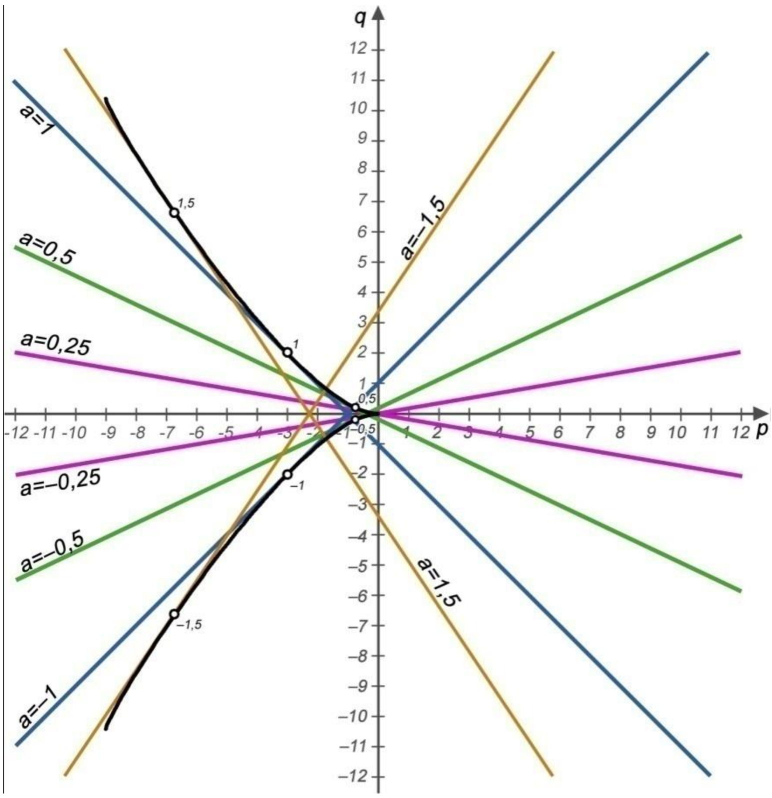


Рис. 22

Определим области на графике со множеством точек (p; q), координаты которых соответствуют p и q в уравнениях $x^3 + px + q = 0$:

а) с тремя действительными корнями;

б) с двумя действительными корнями;

в) с одним действительными корнем.

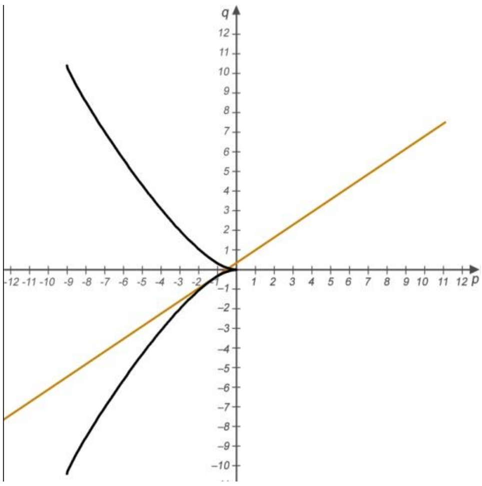


Рис. 23 а

Возьмем точку из внешней области A (1;1) и попытаемся провести через нее касательные к огибающей $x^3 + px + q = 0$ (рис. 23 а). У нас получится только одна касательная. Из этого мы можем сделать вывод, что *через любую точку внешней области можно провести только одну касательную к огибающей* $x^3 + px + q = 0$.

В этой области левая часть неравенства **(4)** не может обращаться в нуль и должна иметь знак. Для того, чтобы узнать, какой это знак, достаточно найти его в какой-либо точке внешней области, например, в любой точке оси q, не совпадающей с началом получим неравенство координат.

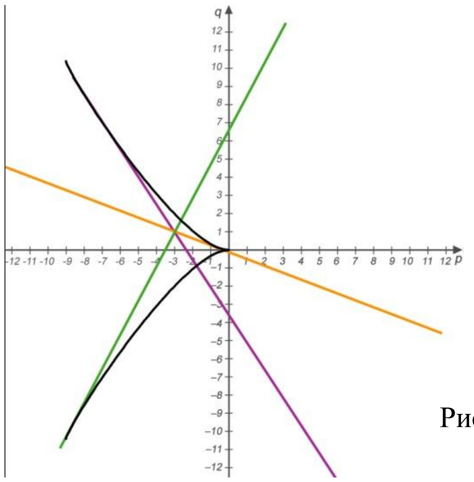
Подставляя координаты этой точки в изначальное неравенство **(4)** мы внешней области:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$$

.

Это и будем условием, необходимым для того, чтобы уравнение $x^3 + px + q = 0$ имело один корень.

Теперь же возьмем точку B(–3;1) из внутренней области (рис. 23 б). Как мы видим, из нее можно провести 3 корневых прямых к огибающей. Следовательно, подставив

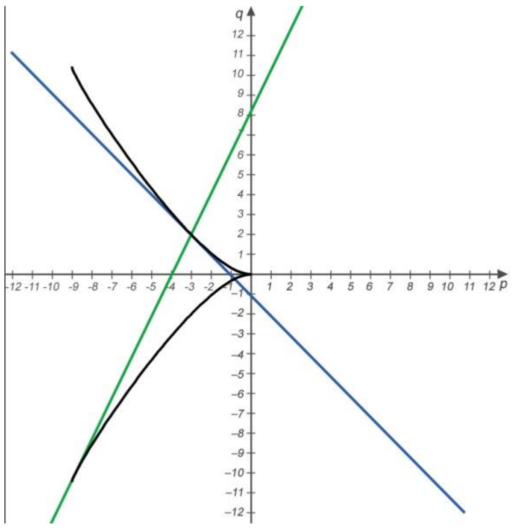


координаты любой точки из этой области в изначальное уравнение $x^3 + px + q = 0$ мы получим уравнение, имеющее 3 различных корня. В любой точке этой области может выполняться только следующее неравенство:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0.$$

Рис. 23 б

Теперь рассмотрим точку C(–3;2). Она лежит на самой огибающей и через нее возможно провести только две касательные к этой огибающей (рис. 23 в). Значит,



многочлен $x^3 + px + q = 0$, где p и q — координаты точек огибающей, имеет один совпадающий корень и один обычный корень:

$x^3 + px + q = (x - x_1)^2 (x - x_2)$, где $x_1 \neq x_2$.

Рис. 23 в

Глава IV. Исследование уравнения четвертой степени

§1. Исследование уравнения $x^4+px+q=0$

1.1. I способ для нахождения уравнения огибающей уравнения $x^4+px+q=0$:

Для нахождения уравнения огибающей уравнения четвертой степени $x^4+px+q=0$ **(6)**, нужно чтобы корень этого уравнения был кратный для многочлена и его производной. Получаем систему:

$$\begin{cases} x^4 + px + q = 0 \\ 4x^3 + p = 0 \end{cases}.$$

Пусть $x=a$ – кратный корень, тогда

$$\begin{cases} a^4 + pa + q = 0 \\ 4a^3 + p = 0 \end{cases}$$ откуда $p=-4a^3$,

Подставим $p=-4a^3$ в уравнение четвертой степени с кратным корнем a:

$a^4+a(-4a^3)+q=0$

$a^4-4a^4+q=0$

$-3a^4+q=0$

$q=3a^4$, то есть

$$\begin{cases} p = -4a^3 \\ q = 3a^4 \end{cases}$$. Эти уравнения задают огибающую параметрически, т.е. при изменении a от $-\infty$ до $+\infty$ точка $(-4a^3;3a^4)$ пробегает по всей кривой (огибающей). Выразим уравнение огибающей одним уравнением:

$$\begin{cases} (p)^4 = (-4a^3)^4 \\ (q)^3 = (3a^4)^3 \end{cases} \text{ получим } \begin{cases} p^4 = 256a^{12} \\ q^3 = 27a^{12} \end{cases} \text{ выразим } a$$

$$\begin{cases} a^{12} = \dfrac{p^4}{256} \\ a^{12} = \dfrac{q^3}{27} \end{cases}, \ \frac{p^4}{256} = \frac{q^3}{27} \text{ или } \frac{p^4}{256} - \frac{q^3}{27} = 0$$

$$q^3 = \frac{27}{256}p^4 = 27 \cdot \frac{p^4}{256} = 27\left(\frac{p}{4}\right)^4, \quad q = \left(\frac{27}{256}p^4\right)^{\frac{1}{3}}, \quad q = 3\left(\frac{p}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$\boxed{q = \frac{3}{\sqrt[3]{256}}p^{\frac{4}{3}}}$$ — уравнение для нахождения координат точек огибающей.

Найдем по этому уравнению найдем q от p:

p	q	p	q	p	q
0,25	0,074	2	1,191	6	5,151
–0,25	0,074	–2	1,191	–6	5,151
0,5	0,187	3	2,044	7	6,327
–0,5	0,187	–3	2,044	–7	6,327
0,75	0,322	4	3	8	7,56
–0,75	0,322	–4	3	–8	7,56
1	0,472	5	4,04	9	8,845
–1	0,472	–5	4,04	–9	8,845

Таблица 5

По данным таблицы на графике огибающая принимает следующий вид:

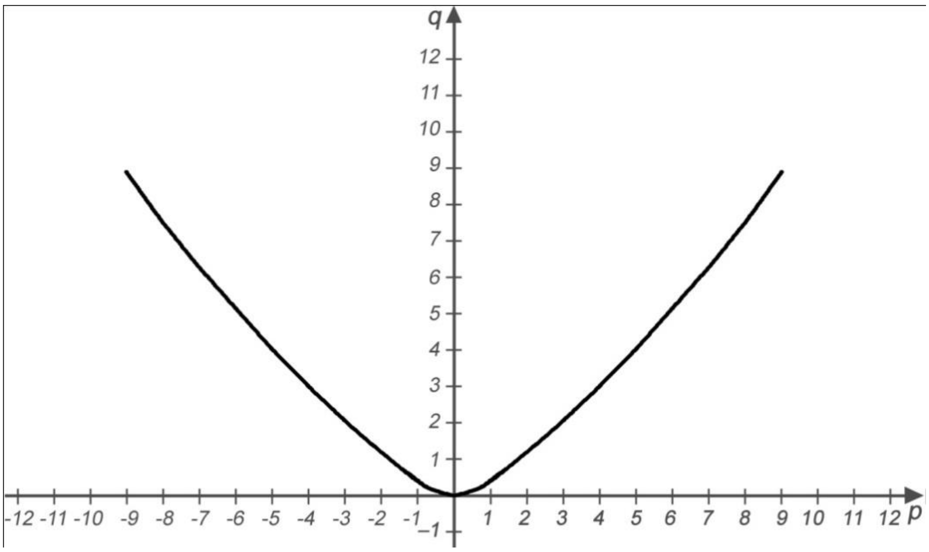


Рис. 24

1.2 II способ для нахождения уравнения огибающей уравнения $x^4+px+q=0$:

$x^4+px+q=0$

Разложим на многочлены, по принципу a — совпадающий кратный корень, $b \neq a$, $c \neq a$, тогда:

$x^4+px+q = (x-a)^2(x-b)(x-c) = (x^2-2ax+a^2)(x^2-bx-cx+bx) =$
$= x^4-bx^3-cx^3+bcx^2-2ax^3+2abx^2+2acx^2-2abcx+a^2x^2-a^2bx-a^2cx+a^2bc =$
$= x^4-(b+c+2a)x^3+(bc+2ab+2ac+a^2)x^2-(2abc+a^2b+a^2c)x+a^2bc$.

Полученное выражение представляет изначальное уравнение **(6)**, где

$$\begin{cases} -(b+c+2a)=0 \\ bc+2ab+2ac+a^2=0 \\ -(2abc+a^2b+a^2c)=p \\ a^2bc=q \end{cases}, \quad \begin{cases} b+c+2a=0 \\ bc+2a(b+c)+a^2=0 \\ 2abc+a^2b+a^2c=-p \\ a^2bc=q \end{cases},$$

$$\begin{cases} b+c=-2a \\ bc+2a(-2a)+a^2=0 \\ 2abc+a^2(-2a)=-p \\ a^2bc=q \end{cases}, \quad \begin{cases} b+c=-2a \\ bc-4a^2+a^2=0 \\ 2abc-4a^3=-p \\ a^2bc=q \end{cases},$$

$$\begin{cases} b+c=-2a \\ bc-3a^2=0 \\ 2abc-4a^3=-p \\ a^2bc=q \end{cases}, \quad \begin{cases} b+c=-2a \\ bc=3a^2 \\ 2a\cdot 3a^2-2a^3=-p \\ a^2 3a^2=q \end{cases},$$

$$\begin{cases} b+c=-2a \\ bc=3a^2 \\ 6a^3-2a^3=-p \\ 3a^4=q \end{cases}, \quad \begin{cases} b+c=-2a \\ bc=3a^2 \\ -4a^3=p \\ 3a^4=q \end{cases}.$$

$\begin{matrix} p=-4a^3 \\ q=3a^4 \end{matrix}$ — координаты любой точки огибающей уравнения **(6)**, а также общей точки для этой огибающей и корневой прямой $q+ap+a^4=0$.

$$\begin{cases} b+c=-2a \\ bc=3a^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} -4a^3=p \\ 3a^4=q \end{matrix} \qquad \begin{matrix} q^3=27a^{12} \\ p^4=4^4a^{12} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a^{12}=\dfrac{q^3}{27} \\ a^{12}=\dfrac{p^4}{4^4} \end{matrix} \qquad \left(\frac{q}{3}\right)^3=\left(\frac{p}{4}\right)^4$$

1.3. Корневые прямые огибающей $q=\dfrac{3}{\sqrt[3]{256}}p^{\frac{4}{3}}$

Для нахождения корневых прямых огибающей уравнения четвертой степени обозначим за x некоторое действительное постоянное число a. Тогда уравнение примет вид $q+ap+a^4=0$.

Найдем множество таких прямых по таблице q от a, p:

Таблица 3

a	*p*	*q*	***a***	*p*	*q*	***a***	*p*	*q*	***a***	*p*	*q*
0,25	1	–0,25	**0,5**	1	–0.56	**0,75**	1	–1,07	**0,88**	1	–1,48
	–3	–0,75		–3	1,44		–3	1,93		–3	2,04
–0,25	–1	0,25	**–0,5**	–1	–0.56	**–0,75**	–1	–1,07	**–0,88**	–1	–1,48
	3	0,75		3	1,44		3	1,93		3	2,04
a	*p*	*q*	***a***	*p*	*q*	***a***	*p*	*q*	***a***	*p*	*q*
0,95	1	–1,76	**1**	1	–2	**1,5**	1	–6,56	**2**	1	–18
	–3	2,04		–3	2		–3	–0,56		–3	–10
–0,95	–1	–1,76	**–1**	–1	–2	**–1,5**	–1	–6,56	**–2**	–1	–18
	3	2,04		3	2		3	–0,56		3	–10

Таблица 6

Теперь покажем некоторые из них на графике:

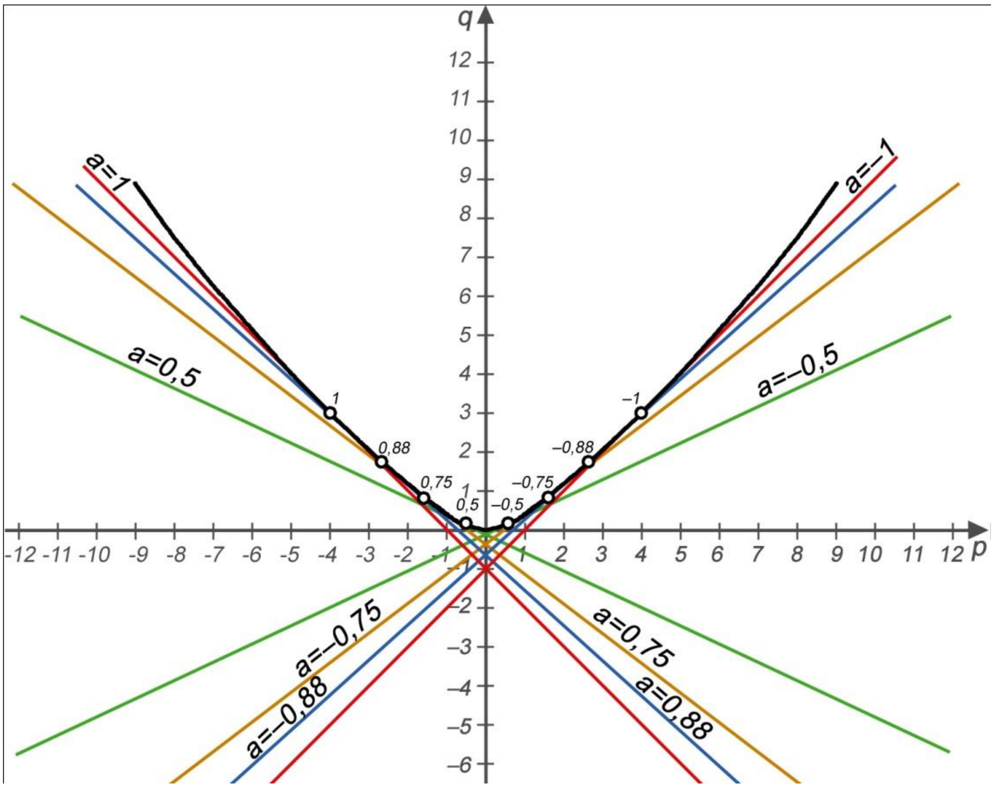


Рис. 25

Таблица координат общих точек для огибающей и корневых прямых:

a	*p*	*q*	***a***	*p*	*q*	***a***	*p*	*q*
0,5	–0,5	0,188	**0,88**	–2,73	1,78	**1**	–4	3
–0,5	0,5	0,188	**–0,88**	2,73	1,78	**–1**	4	3
0,75	–1,69	0,95	**0,95**	–3,43	2,44	**1,5**	–13,5	15,19
–0,75	1,69	0,95	**–0,95**	3,43	2,44	**–1,5**	13,5	15,19

Таблица 7

Определим области на графике со множеством точек *(p; q)*, координаты которых соответствуют *p* и *q* в уравнениях $x^4 + px + q = 0$:

а) с двумя действительными корнями;

б) с одним действительными корнем;

в) не имеющих корней.

Для этого *p* примем равное нулю, чтобы было проще решать, тогда уравнение примет вид $x^4+q=0$.

Точка А(0; 1):

p=0; q=1

$x^4+1=0$; $x^4=-1$ — невозможно, учитывая, что мы рассматриваем действительные числа. Следовательно, корней нет.

Точка B(0; –1):
p=0; q= –1
$x^4–1= 0$; $x^4= 1$; x= ±1 — два корня.

Точка C(0; 0):
p=0; q= 0
$x^4+0= 0$; $x^4= 0$; x=0 — один корень.

Покажем это на графике

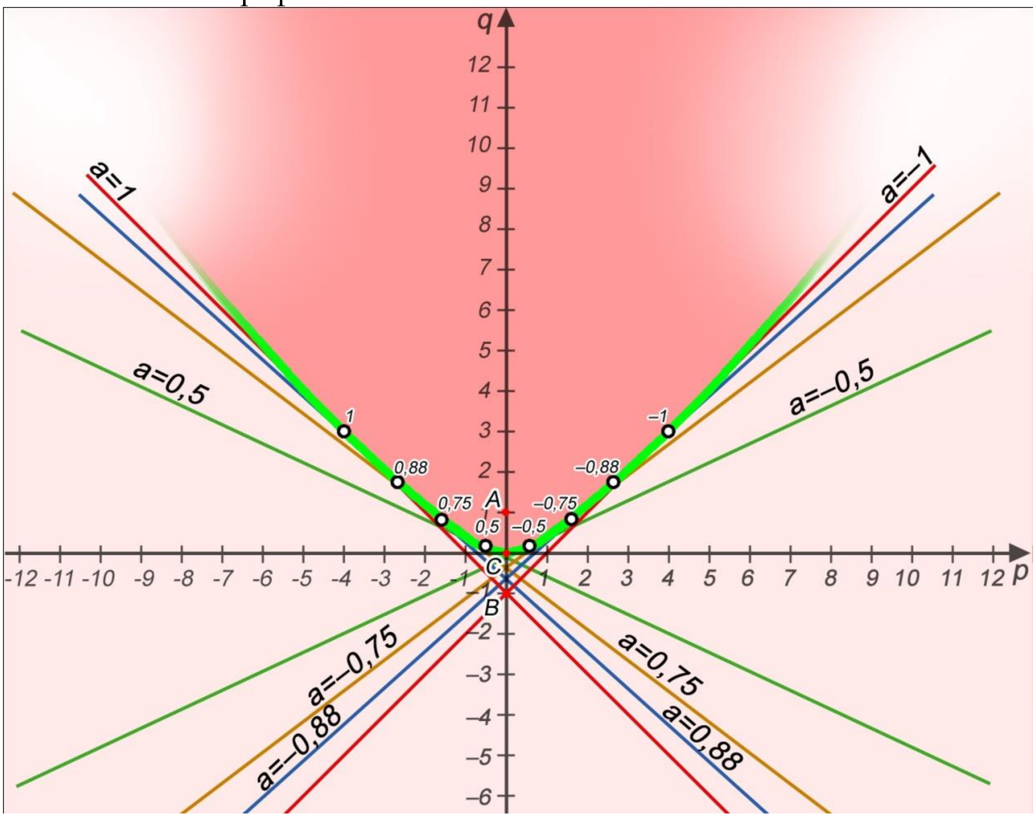


Рис. 26

Светлая область — 2 корня; точки огибающей — 1 корень; темная область — нет корней.

§2. Исследование уравнения $x^4+x^2+px+q=0$

2.1. График функции $y=x^4+x^2+px+q$

$x^4+x^2+px+q=0$

Разложим на многочлены, по принципу a — совпадающий кратный корень, $b\neq a$, $c\neq a$, тогда:

$x^4+x^2+px+q=(x-a)^2(x-b)(x-c)=$

$=x^4-(b+c+2a)x^3+(bc+2ab+2ac+a^2)x^2-(2abc+a^2b+a^2c)x+a^2bc$

$$\begin{cases} -(b+c+2a)=0 \\ bc+2ab+2ac+a^2=1 \\ -(2abc+a^2b+a^2c)=p \\ a^2bc=q \end{cases} \quad \begin{cases} b+c=-2a \\ bc+2a(b+c)+a^2=1 \\ 2abc+a^2(b+c)=-p \\ a^2bc=q \end{cases} \quad \begin{cases} b+c=-2a \\ bc+2a(-2a)+a^2=1 \\ 2abc+a^2(-2a)=-p \\ a^2bc=q \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+c=-2a \\ bc-4a^2+a^2=1 \\ 2abc-2a^3=-p \\ a^2bc=q \end{cases} \quad \begin{cases} b+c=-2a \\ bc-3a^2=1 \\ 2abc-2a^3=-p \\ a^2bc=q \end{cases} \quad \begin{cases} b+c=-2a \\ bc=3a^2+1 \\ 2a(3a^2+1)-2a^3=-p \\ a^2(3a^2+1)=q \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+c=-2a \\ bc=3a^2+1 \\ 2a+6a^3-2a^3=-p \\ a^2+3a^4=q \end{cases} \quad \begin{cases} b+c=-2a \\ bc=3a^2+1 \\ 2a+4a^3=-p \\ a^2+3a^4=q \end{cases} \quad \begin{cases} p=-2a-4a^3 \\ q=a^2+3a^4 \end{cases}$$

В параметрической форме.

Теперь найдем точки огибающей, подставляя различные значения a:

a	*p*	*q*	***a***	*p*	*q*	***a***	*p*	*q*
0,25	–0,56	0,074	**0,75**	–3,19	1,51	**1**	–6	4
–0,25	0,56	0,074	**–0,75**	3,19	1,51	**–1**	6	4
Таблица 3 **0,5**	–1,5	0,44	**0,88**	–4,49	2,57	**1,5**	–16,5	17,44
–0,5	1,5	0,44	**–0,88**	4,49	2,57	**–1,5**	16,5	17,44

Таблица 8

По данным таблицы построим график:

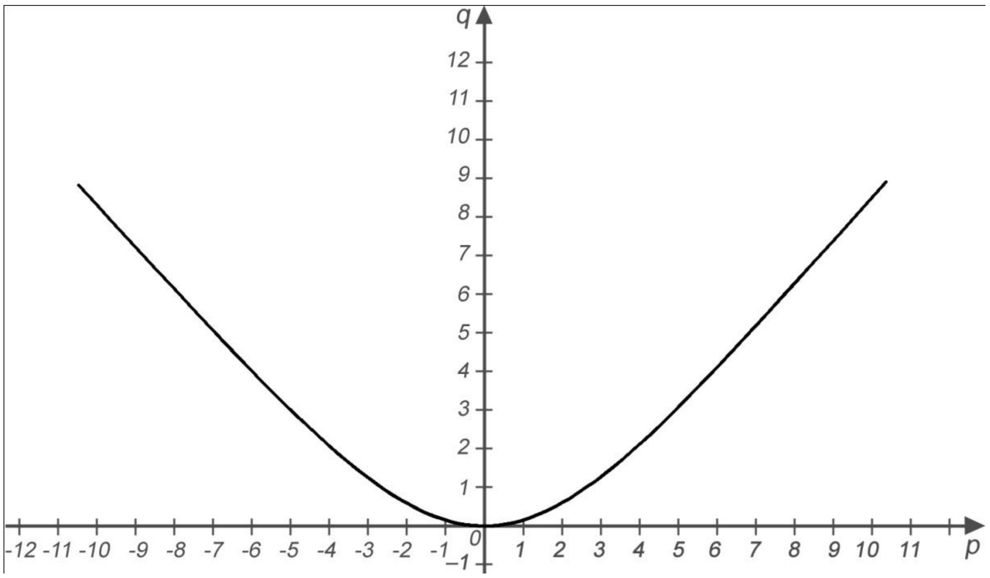


Рис. 27

2.2. Корневые прямые огибающей уравнения $x^4+x^2+px+q=0$

Для нахождения корневых прямых огибающей уравнения $x^4+x^2+px+q=0$ обозначим за x некоторое действительное число a. Тогда уравнение примет вид $a^4+a^2+pa+q=0$, откуда выразим q: $q= -pa-a^2-a^4$

Подставляя различные значения a, найдем множество точек корневых прямых:

a	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*
0,25	1	–0,32	**0,5**	1	–0.81	**0,75**	1	–1,63	**0,88**	1	–2,25
	–3	0,68		–3	1,19		–3	1,37		–3	1,27
–0,25	–1	–0,32	**–0,5**	–1	–0.82	**–0,75**	–1	–1,63	**–0,88**	–1	–2,25
	3	0,68		3	1,19		3	1,37		3	1,27
a	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*
0,95	1	–2,67	**1**	1	–3	**1,5**	1	–8,8	**2**	1	–22
	–3	1,13		–3	1		–3	–2,8		–3	–14
–0,95	–1	–2,67	**–1**	–1	–3	**–1,5**	–1	–8,8	**–2**	–1	–22
	3	1,13		3	1		3	–2,8		3	–14

Таблица 9

Теперь покажем некоторые из них на графике:

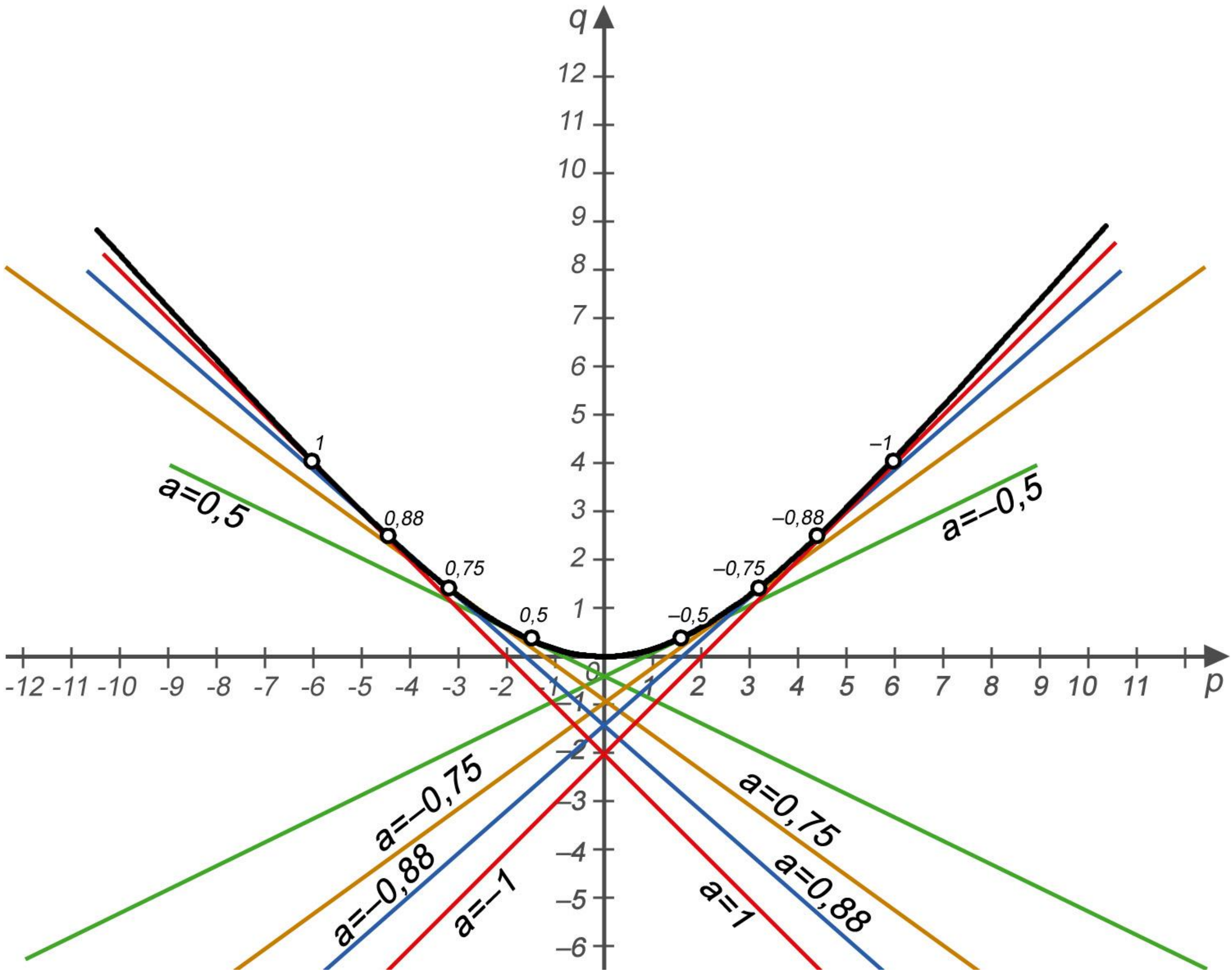


Рис. 27

Таблица координат общих точек совпадает с таблицей точек для нахождения графика огибающей (см. таблицу 8).

Определим области на графике со множеством точек *(p; q)*, координаты которых соответствуют p и q в уравнениях $x^4 + x^2 + px + q = 0$:

а) с двумя действительными корнями под огибающей;

б) с одним действительными корнем в точке *x=0*;

в) не имеющих корней внутри огибающей.

Докажем алгебраически:
Точка A (0; 1):
p=0; q=1
$x^4+x^2+1=0$
$x^4+x^2=-1$ — нет корней, так как сумма положительных чисел не может быть отрицательной.

Точка B (0; –0,35):
p=0; q= –0,35 — два корня.
$x^4+x^2-0{,}35=0$
$x^2=T$, $T\geq 0$
$T^2+T-1=0$

$$T_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+1{,}4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{2{,}4}}{2}$$

$T_1=\frac{-1-\sqrt{2{,}4}}{2}<0$, не удовлетворяет условию $T\geq 0$.

$$T_2=x^2=\frac{-1+\sqrt{2{,}4}}{2}$$

$x=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2{,}4}}{2}}$ — два корня.

Точка C (0; 0):
p=0; q= 0 — один корень.
$x^4+x^2=0$
$x^2(x^2+1)=0$
$x=0$

Докажем наличием корневых прямых:

Точка A (0; 1):
p=0; q=1
Нет корней, так как нет корневых прямых, проходящих через эту точку.

Точка B (0; –0,35):
p=0; q= –0,35 — два корня, так как через эту точку проходит две корневые прямые: *a=0,5* и *a= –0,5*.

Точка C (0; 0):
p=0; q= 0 — один корень. Через эту точку проходит корневая прямая, совпадающая с осью *p*.

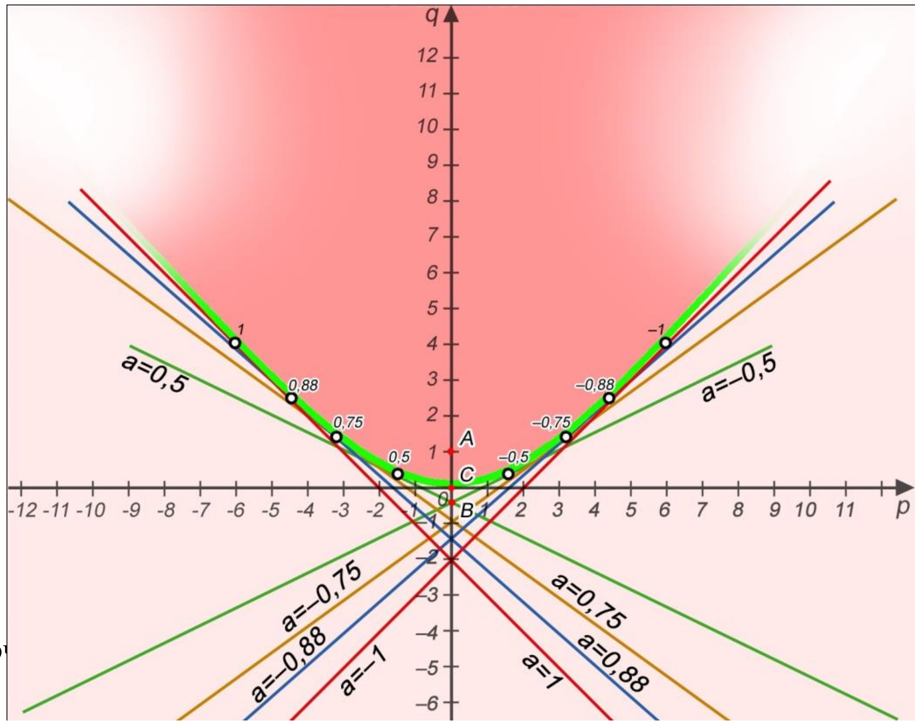


Рис. 29

Светлая область — 2 корня; то
темная область — нет корней.

§3. Исследование уравнения $x^4–x^2+px+q=0$

3.1. График функции $y=x^4-x^2+px+q$

$x^4–x^2+px+q=0$

Разложим на многочлены, по принципу a — совпадающий кратный корень, $b\neq a$, $c\neq a$, тогда:

$x^4–x^2+px+q=(x–a)^2(x–b)(x–c)=(x^2–2xa+a^2)(x–c)=$

$=(x^3–2x^2a+xa^2–x^2b+2xab–a^2b)(x–c)=$

$=x^4–x^3c–2x^3a–x^3b+2x^2ac+a^2x+x^2bc+2x^2ab–2xabc–xa^2b–xa^2c+a^2bc=$

$=x^4–(c+2a+b)x^3+(2ac+a^2+bc+2ab)x^2+(–a^2c–a^2b–2a)x+a^2bc=0$

$$\begin{cases} -(b+c+2a)=0 \\ bc+2ab+2ac+a^2=-1 \\ -a^2c-a^2b-2abc=p \\ a^2bc=q \end{cases} \quad \begin{cases} b+c=-2a \\ bc+2a(b+c)+a^2=-1 \\ 2abc+a^2(b+c)=-p \\ a^2bc=q \end{cases} \quad \begin{cases} b+c=-2a \\ bc+2a(-2a)+a^2=-1 \\ 2abc+a^2(-2a)=-p \\ a^2bc=q \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+c=-2a \\ bc-4a^2+a^2=-1 \\ 2abc-2a^3=-p \\ a^2bc=q \end{cases} \quad \begin{cases} b+c=-2a \\ bc-3a^2=-1 \\ 2abc-2a^3=-p \\ a^2bc=q \end{cases} \quad \begin{cases} b+c=-2a \\ bc=3a^2-1 \\ 2a(3a^2-1)-2a^3=-p \\ a^2(3a^2-1)=q \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+c=-2a \\ bc=3a^2+1 \\ 6a^3-2a^3-2a=-p \\ 3a^4-a^2=q \end{cases} \quad \begin{cases} b+c=-2a \\ bc=3a^2+1 \\ 4a^3-2a=-p \\ 3a^4-a^2=q \end{cases} \quad \begin{cases} p=2a-4a^3 \\ q=3a^4-a^2 \end{cases}$$

В параметрической форме.

Теперь найдем точки огибающей, подставляя различные значения a:

a	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*
0,1	0,196	–0,0097	**0,7**	0,028	0,2303	**1,6**	–13,184	17,1008
–0,1	–0,196	–0,0097	**–0,7**	–0,028	0,2303	**–1,6**	13,184	17,1008
0,2	0,368	–0,0352	**0,8**	–0,448	0,588	**1,8**	–19,728	28,2528
–0,2	–0,368	–0,0352	**–0,8**	0,448	0,588	**–1,8**	19,728	28,2528
0,3	0,492	–0,0657	**0,9**	–1,116	1,1583	**2**	–28	44
–0,3	–0,492	–0,0657	**–0,9**	1,116	1,1583	**–2**	28	44
0,4	0,544	–0,0832	**1**	–2	2	**2,5**	–57,5	110,938
–0,4	–0,544	–0,0832	**–1**	2	2	**–2,5**	102	110,938
0,408	Таблица 8 0,5443	–0,0833	**1,2**	–4,512	4,7808	**3**	–102	234
–0,408	Таблица 8 –0,5443	–0,0833	**–1,2**	4,512	4,7808	**–3**	102	234
0,5	0,5	–0,0625	**1,4**	–8,176	9,5647	**3,5**	–164,5	437,937
–0,5	–0,5	–0,0625	**–1,4**	8,176	9,5647	**–3,5**	164,5	437,937
0,6	0,336	0,0288	**1,5**	–10,5	12,9375	**4**	–248	752
–0,6	–0,336	0,0288	**–1,5**	10,5	12,9375	**–4**	248	752

Таблица 10

При построении на плоскости π получается очень интересная огибающая:

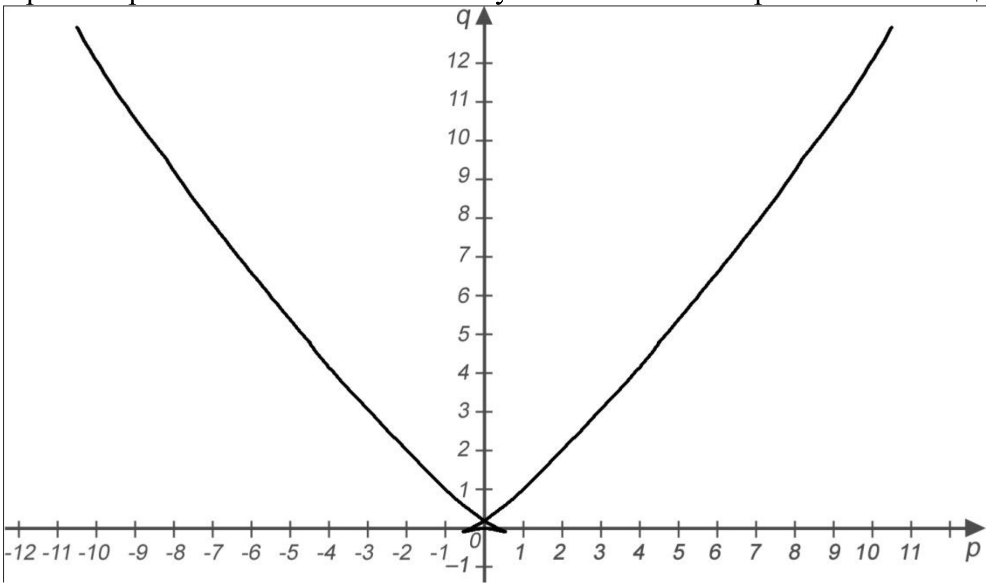


Рис. 30

Если увеличить масштаб начала координат, то мы увидим, что огибающая образует петлю с двумя заострениями.

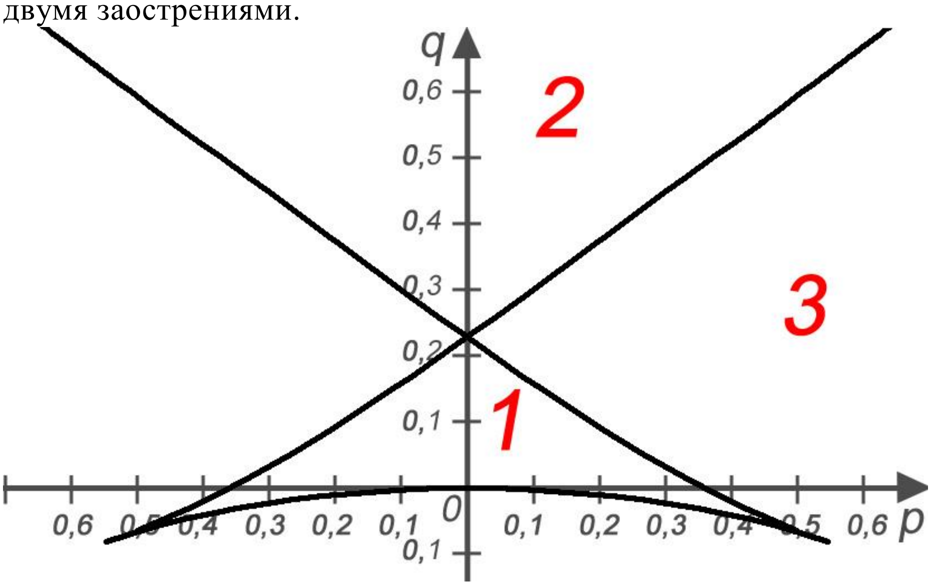


Рис. 31

3.2. Корневые прямые огибающей уравнения $x^4 – x^2 + px + q = 0$

Рассмотрим огибающую уравнения $x^4 – x^2 + px + q = 0$ подробнее. Огибающая состоит из трех дуг, которые вместе разбивают плоскость на три области. Первая из областей — внутренность петли **(1)**. Из любой точки этой области можно провести четыре корневых прямых. Следовательно, в этой области находятся точки, координаты которых соответствуют уравнениями $x^4 – x^2 + px + q = 0$ имеющим 4 корня.

Не из одной точки второй области **(2)** нельзя провести корневой прямой к дугам. Значит в этой области располагаются точки соответствующие уравнениям $x^4 – x^2 + px + q = 0$ не имеющим корней.

В оставшейся области **(3)** из любой точки *(p; q)* можно провести лишь две корневые прямые к огибающей.

Для нахождения корневых прямых огибающей уравнения $x^4 + x^2 + px + q = 0$ обозначим за x некоторое действительное число a. Тогда уравнение примет вид $a^4 + a^2 + pa + q = 0$, откуда выразим q: $q = –pa + a^2 – a^4$.

Подставляя различные значения a, найдем множество точек корневых прямых:

a	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*
0,1	0,1	–0,00	**0,2**	0,1	0,018	**0,3**	0,1	0,052	**0,4**	0,1	0,094
	–0,3	0,039		–0,3	0,984		–0,3	0,172		–0,3	0,254
–0,1	–0,1	–0,00	**–0,2**	–0,1	0,018	**–0,3**	–0,1	0,052	**–0,4**	–0,1	0,094
	0,3	0,039		0,3	0,984		0,3	0,172		0,3	0,254
a	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*
0,5	0,1	0,137	**0,6**	0,1	0,17	**0,7**	0,1	0,179	**0,8**	0,1	0,15
	–0,3	0,337		–0,3	0,41		–0,3	0,459		–0,3	0,47
–0,5	–0,1	0,137	**–0,6**	–0,1	0,17	**–0,7**	–0,1	0,179	**–0,8**	–0,1	0,15
	0,3	0,337		0,3	0,41		0,3	0,459		0,3	0,47
a	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*
0,9	0,1	0,064	**1**	1	–1	**1,25**	1	–2,13	**1,5**	1	–4,31
	–0,3	0,424		–3	3		–3	2,87		–3	1,69
–0,9	–0,1	0,064	**–1**	–1	–1	**–1,25**	–1	–2,13	**–1,5**	–1	–4,31
	0,3	0,424		3	3		3	2,87		3	–1,69
a	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*	**a**	*p*	*q*
2	1	–14	**2,5**	1	–35,3	**3**	1	–75	**4**	1	–244
	–3	–6		–3	–25,2		–3	–63		–3	–288
–2	–1	–14	**–2,5**	–1	–35,3	**–3**	–1	–75	**–4**	–1	–244
	3	–6		3	–25,2		3	–63		3	–288

Таблица 11

Теперь покажем некоторые из них на графике:

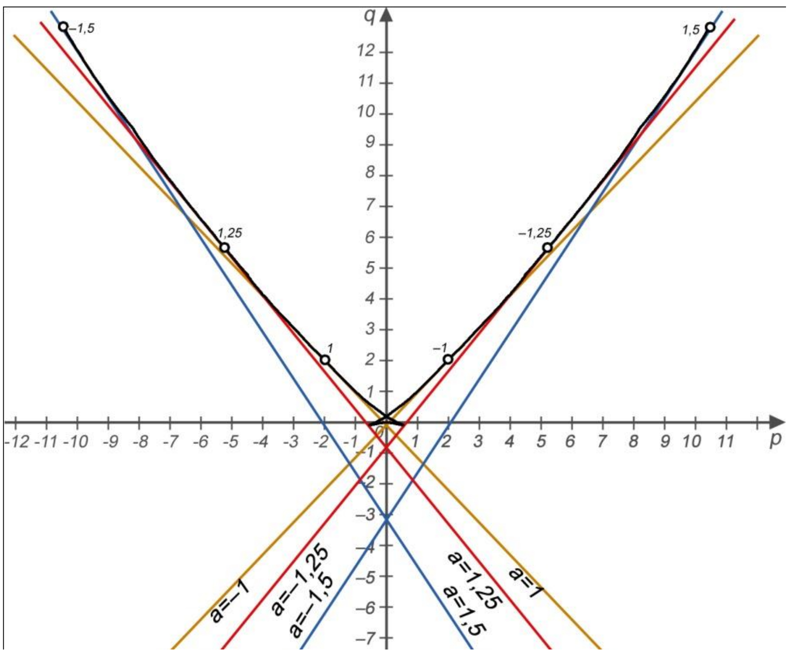


Рис. 32

Таблица координат общих точек совпадает с таблицей точек для нахождения графика огибающей (см. таблицу 10).

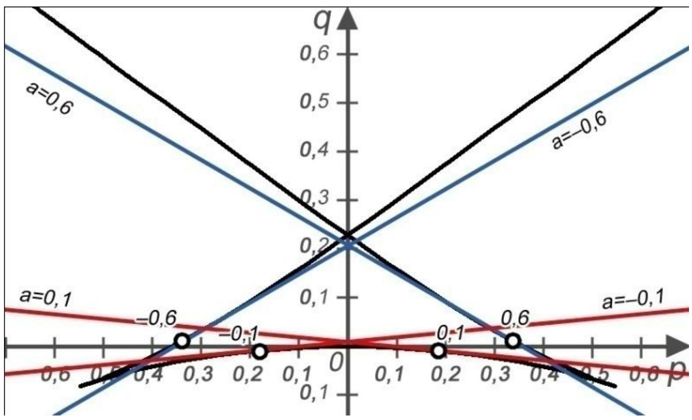


Рис. 33

Определим области на графике со множеством точек *(p; q)*, координаты которых соответствуют *p* и *q* в уравнениях $x^4 - x^2 + px + q = 0$:

а) с четырмя действительными корнями в «петле» огибающей;

б) с двумя действительными корнями под огибающей;

в) с одним действительными корнем в точке *x=0*;

г) не имеющих корней внутри огибающей.

Докажем алгебраически:

Точка А (0; 0,5):

p=0; q=0,5

$x^4 – x^2 + 0{,}5 = 0$

$x^4 – x^2 + 0{,}5 = 0$

$x^2 = T$, $T \geq 0$

$T^2 – T + 0{,}5 = 0$

$T_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{2}$ — нет корней, так как квадратного корня из отрицательного числа не бывает.

Точка В (0; –0,9):

p=0; q= –0,9 — два корня.

$x^4 – x^2 – 0{,}9 = 0$

$x^2 = T$, $T \geq 0$

$T^2 – T – 0{,}9 = 0$

$T_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3{,}6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4{,}6}}{2}$

$T_1 = \frac{1-\sqrt{4{,}6}}{2}$ <0, не удовлетворяет условию $T \geq 0$.

$T_2 = x^2 = \frac{1+\sqrt{4{,}6}}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{4{,}6}}{2}}$ — два корня.

Точка С (0; 0):

p=0; q= 0 — один корень.

$x^4 + x^2 = 0$

$x^2(x^2+1) = 0$

x=0

Точка D (0; 0,1):

p=0; q=0,1

$x^4 – x^2 + 0,1 = 0$

$x^2 = T$, $T \geq 0$

$T^2 – T – 0,1 = 0$

$$T_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-0,4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{0,6}}{2}$$

$$T_1 = \frac{1-\sqrt{0,6}}{2}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{0,6}}{2}}$$ — два корня;

$$T_2 = x^2 = \frac{-1+\sqrt{4,6}}{2}$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{4,6}}{2}}$$ — два корня.

Докажем наличием корневых прямых:

Точка A (0; 1):

p=0; q=1

Нет корней, так как нет корневых прямых, проходящих через эту точку.

Точка B (0; –0,9):

p=0; q= –0,9 — два корня, так как через эту точку проходит две корневые прямые: *a=0,75* и *a= –0,75*.

Точка C (0; 0):

p=0; q= 0 — один корень. Через эту точку проходит корневая прямая, совпадающая с осью *p*.

Точка D (0; 0,1):

p=0; q= –0,1 — четыре корня, так как через эту точку проходит две корневые прямые.

Черная область — 4 корня;
светлая область — 2 корня;
точки огибающей — 1 корен
темная область — нет корне

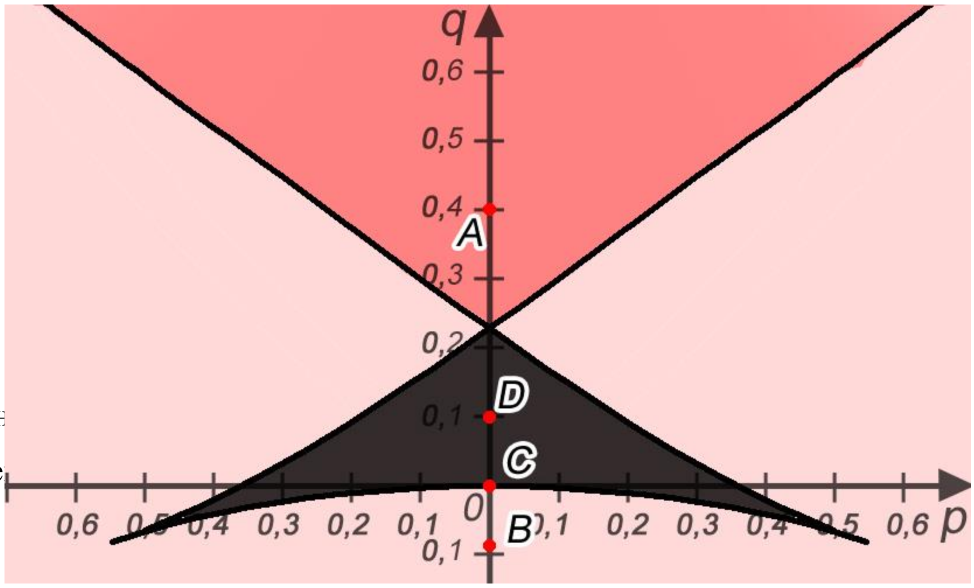


Рис. 34

Глава 5. Применение сетчатых номограмм

Из учебно-научных пособий мне известно, что интерес к решению задач с параметрами не только не ослабевает, но и возрастает с каждым годом: если до начала 60-х годов прошлого столетия задачи подобного рода лишь иногда решали на механико-математических факультетах университетов, то в 60-х годах стали предлагаться и на физических факультетах, и на других факультетах естественных наук. И это не случайно. Теоретическое изучение и математическое моделирование многообразных процессов из различных областей науки и практической деятельности человека часто приводят к достаточно сложным уравнениям, неравенствам или их системам, содержащим параметры.

Построение номограмм для конкретных функциональных зависимостей позволяет не только исследовать их качественных характер, но и практически мгновенно находить приближенные решения, отвечающие заданным критериям.

В годы Великой Отечественной войны использование сетчатых номограмм в разработке стратегических действий было незаменимым.

Например, Л.А.Люстерник стал автором таблиц для определения месторасположения кораблей по радиопеленгу, а исследования сотрудников, занимающихся теорией вероятностей, выполнили исследования по оптимальному рассеиванию снарядов при стрельбе по площадям (академик А.Н. Колмогоров) и по бомбометанию с малых высот при малых скоростях самолетов, чем существенно повысили эффективность действий легкобомбардировочных авиаполков.

Применительно к теме настоящей работы нельзя не упомянуть о том, какое важное значение для решения оборонных задач имела работа номографического бюро при НИИ математики МГУ, которым руководил известный геометр Н.А.Глаголев. Номограммы, изготовленные в этом бюро, применялись в военно-морском флоте, в частности, при веерных атаках конвоев противника с подводных лодок и торпедных катеров; частях зенитной артиллерии;

истребительской авиации для оптимального перехвата бомбардировщиков противника, совершающих налеты на наши города.

III. Заключение

Для решения поставленных задач нами были выбраны следующие методы исследования:

— теоретический (изучение и теоретический анализ научной, педагогической и специальной литературы; моделирование);

— практический (реализация математических моделей и алгоритмов в инструментальных системах; проверки выдвигаемых гипотез).

Научная новизна и теоретическая значимость исследования заключается

— в теоретическом обосновании целесообразности создания справочной информационной системы «сетчатые номограммы и их применение»;

— обоснование и вывод алгоритма нахождения уравнений, огибающих для приведенных степенных уравнений.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработана справочная информационная система о сетчатых номограммах и способах их применения в различных областях науки и техники, созданы программы на языке QBasic по вычислению координат точек огибающих. Построение сетчатых номограмм для конкретных функциональных зависимостей позволяет не только исследовать их качественный характер, но и практически мгновенно находить приближенные решения, отвечающие заданным критериям. Это говорит о целесообразности геометрического подхода к решению степенных уравнений с двумя параметрами.

IV. Литература

1. В.В.Вавилов, Сетчатые номограммы. - Журнал «Квант», № 9 (1978)

2. Гуттер Р.С., Полунов Ю.Л. Джироламо Кардано. - М., «Знание», 1980.

3. Натяганов В.Л., Лужина Л.М. Методы решения задач с параметрами: Учеб. Пособие. – М.: Изд-во МГУ, 2003.